Maestro Gernardo

Cálculo de Fracciones

Maestro Gernardo

Cálculo de fracciones / Maestro Gernardo ; comentado por Celina A. Lértora Mendoza ; con prólogo de Celina A. Lértora Mendoza. - 1a ed. - Buenos Aires : Del Rey, 2007.
150 p. ; 20x14 cm.

Traducido por: Celina A. Lértora Mendoza

ISBN 978-950-99892-2-1

1. Matemática Fracciones. I. Lértora Mendoza, Celina A., coment. II. Lértora Mendoza, Celina A., prolog. III. Lértora Mendoza, Celina A., trad. IV. Título
CDD 515.83

Fecha de catalogación: 20/12/2007

Diseño de tapa: Florencia Lanzelotto

Marcelo T. de Alvear 1640, 1 E
Buenos Aires- Argentina
E. mail: fundacionfepai@yahoo.com.ar

Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723
Impreso en Argentina - Printed in Argentina

ISBN 978-950-99892-2-1

Maestro Gernardo

Cálculo de fracciones

Introducción, traducción y notas

CELINA A. LÉRTORA MENDOZA

Buenos Aires
Ediciones del Rey

INTRODUCCIÓN

Celina A. Lértora Mendoza

Los estudios de historia de la matemática antigua y medieval tuvieron un notable progreso desde fines del s. XIX. Incluso en un contexto positivista, los historiadores lograron una revaloración de los conocimientos matemáticos antiguos. Los trabajos de P. Tannery sobre la matemática griega no sólo dieron luz sobre la tradición anterior a Arquímedes, sino que aportaron un nuevo criterio hermenéutico, mostrando que esos conceptos podían ser comprendidos desde la matemática moderna sin perder su sentido. Esto es lo que permitiría considerarlos antecedentes válidos de desarrollos temporalmente muy posteriores.

En relación a la matemática medieval, su escaso conocimiento era paralelo a similar situación con respecto a otros aspectos de la cultura medieval, como la física, la óptica, las técnicas, e incluso la filosofía, descontando de ella algunos célebres teólogos como Tomás de Aquino, Scoto, Anselmo, Buenaventura, y unos pocos más. De muchos autores medievales se conocía sólo el nombre y tal vez algunas obras, o fragmentos de ellas. Muchas atribuciones dudosas debían despejarse mediante un estudio de textos, para lo cual era necesario buscar y transcribir los originales y comparar las copias.

El problema más importante para los medievalistas era, pues, el de las fuentes. Y este problema era común a todas las historias disciplinares. Los métodos de abordaje que inicialmente se usaron ponían el acento (como es lógico) en los aspectos filológicos y de crítica textual. De este modo podían obtenerse transcripciones correctas que permitirían estudios de contenido más garantizados.

En el caso de las ciencias, y especialmente de las matemáticas, se añadía otro problema no menos importante y es el de la comprensión del lenguaje antiguo en términos del desarrollo actual de esa disciplina. Varias cuestiones se planteaban al respecto: cómo interpretar la terminología antigua a la luz de la actual para hacer comprensibles esos textos a los matemáticos de hoy, cómo expresar (si es posible) las formulaciones antiguas, cómo hacer conmensurables sus teorías matemáticas con las nuestras. Este tema de la historiografía de las matemáticas antiguas y medievales en el siglo XX y sus direcciones hermenéuticas, solidarias en parte también con las distintas metamatemáticas con que conectan, es en sí mismo también un problema historiográfico y merece investigaciones especiales. Incluso como un aporte a esta historia, podemos señalar algunos hitos.

Excursus 1. La cuestión de la geometría griega

Los trabajos de O. Neugebauer[1] han clarificado sin duda en forma global la problemática de las ciencias exactas en la antigüedad. El papel de la labor geométrica de Euclides debe ser redimensionado y reconceptualizado, sobre todo habiéndose establecido en forma bastante clara la línea que va de él a Pappus y Arquímedes. Richard Robinson, en un trabajo de 1936[2], discute con Cornford el concepto que los historiadores tenían acerca del análisis matemático de los griegos. La idea es que el análisis es un método de descubrimiento, seguido de una síntesis. El proceso es el siguiente: para demostrar una proposición (1) se la asume como verdadera y se deduce que implica (2), que (2) implica (3), y así sucesivamente hasta llegar a una proposición *n* que ya había sido previamente demostrada, pero conocida independientemente de (1). De allí se sigue la cadena inversa, es decir, de *n* a (1), con lo cual se completa la demostración; es decir, el método exige que las implicaciones sean recíprocas. Robinson ha mostrado que esta

---

[1] Especialmente *The Exact Sciences in Antiquity*, Copenhaguen Ejnar Muksgard, 1951, y Oxford, University Pres - Princeton Unviersity Press, 1957.

[2] Aparecido en *Mind* 45, 1936: 464-473; cito por la traducción portuguesa "A análise na geometria grega", *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 4/1983: 5-15.

conceptualización en realidad deriva de un texto de Pappus (demostraciones 1-5 del Libro XIII interpoladas en Euclides y otras). La discusión con Cornford se debe a que éste considera que el proceso no se inicia con la búsqueda de lo implicado por la proposición (1) y por lo tanto el análisis no sería un proceso de deducción, ya que (2) no se deduce de (1). La pregunta no es qué está implicado por (1) sino qué podría implicar (1). En esta interpretación, las implicaciones con que trabaja el análisis no necesariamente son sería recíprocas. Para Cornford, la actividad de la mente que pasa de (1) a (2) no es deducción, sino una especie de intuición de la proposición (2).

Ahora bien, el antecedente de esta discusión, como lo muestra Norman Gulley[3] es que Pappus describe en forma consistente un método que los griegos llamaron "análisis geométrico", excluyendo toda otra forma de análisis. Robinson y Cornford -dice Gulley- interpretan la descripción de los pasos como "consecuencias lógicas", pero mientras que Cornford considera imposible que una secuencia obtenga consecuencias en las dos direcciones, Robinson demuestra que es posible cuando la secuencia es convertible[4]. Según Robinson[5], Cornford se equivoca porque está influido por un principio *a priori*, establecido por él mismo, según el cual no se puede seguir la misma secuencia de pasos primero en un sentido y luego en el opuesto. Por lo tanto, la interpretación estándar de Pappus sería una imposibilidad lógica. Pero no es así y el mismo Robinson propone un ejemplo de la posibilidad rechazada por Cornford.

Por su parte Gulley sostiene -correctamente a mi juicio- que si al menos uno de los dos abordajes describe adecuadamente el método, hay que suponer que una descripción es correcta y la otra se basa en una tradición que confunde el análisis geométrico con

[3] En un trabajo publicado en *Phronesis* 3, 1958: 1-14; cito por la traducción "A análise geométrica grega", *Cadernos de História e Filosofía da Ciência* 4/1983: 116-27.
[4] Cf. Gulley, p. 17.
[5] Art. cit. p. 9 ss.

otra forma de análisis; o bien debe suponerse que ambas descripciones se refieren a formas distintas que eran conocidas por los griegos como análisis geométrico. Gulley mismo sostiene esta segunda solución[6]. Por una parte, los griegos sabían que muchas proposiciones geométricas son convertibles y Aristóteles lo menciona[7]. Además, Aristóteles explica en su obra que "análisis" es un proceso de resolución de un todo en sus partes; en sentido lógico es ascendiente y se opone al descendiente o síntesis. Es decir, es un método de trabajar partiendo de la conclusión para llegar a las premisas. Gulley observa que los geómetras griegos usaban esta terminología aristotélica. Y según los comentadores, estas condiciones son también las del análisis geométrico. El análisis es un método de descubrimiento y el análisis geométrico es la aplicación a una situación particular de un método que tiene aplicaciones más amplias. Estas descripciones, concluye, son semejantes a las de Pappus. Aristóteles, por su parte, indica expresamente en varios pasajes, que el análisis era un método reconocido pro los geómetras. Es posible que el Estagirita tomara de los geómetras de su tiempo el modelo de análisis y de una concepción ordenada de la geometría. Gulley concluye su estudio indicando que los comentadores de Aristóteles (como Temistio y Filopón) no visualizan una formulación de análisis geométrico que represente a la vez análisis y síntesis como procedimientos deductivos. El procedimiento analítico era aceptado como una formulación correcta, sea que las implicaciones fueran o no recíprocas y saben que hay implicaciones convertibles y otras que no lo son y no presentan un análisis de tipo deductivo[8].

Esta discusión nos lleva a plantear si hubo, y en qué medida, influencia de Aristóteles en Euclides. Durante todo el siglo XX esta discusión estuvo abierta y en cierto modo continúa estándolo.

[6] Art. cit. p. 18.
[7] An. Post. 78a, 10-3.
[8] Gulley interpreta el pasaje descriptivo de Papus como la reproducciòn de dos formulaciones diferentes del método: una que lo describe como movimiento ascendente y otra como deducción o movimiento descendente. Ésta es una interpretación alternativa a Robinson.

Rouse Bell, escribiendo a principios del siglo pasado sostiene que Euclides conoció la geometría platónica pero no parece haber conocido los escritos de Aristóteles[9]. A fines del siglo una opinión difundida es que si bien hay influencia de Platón en Euclides, como la hay en Aristóteles, es incorrecto afirmar que Euclides haya sido platónico[10], al contrario, se decanta por Aristóteles. En su concepto de la matemática, Platón y Aristóteles difieren en tres puntos: el concepto de número, el infinito, y construir líneas a partir de puntos. Pero sobre todo las influencias filosóficas se aprecian en la estructura global de la obra. Euclides establece una diferente entre número y magnitud análoga a la de Aristóteles, y por tanto propicia al separación estricta entre aritmética y geometría. Tratan la aritmética los libros VII al IX, y la geometría los I a VI, XI y XIII. Ambas partes comienzan con distintos conjuntos de definiciones, aunque los axiomas comunes aparecen sólo al comienzo del libro I.

Para Jones, la explicación más natural de la restricciòn euclidiana a las cantidades homogéneas es precisametne la influencia de Aristóteles. Su razonamiento, en síntesis, es el siguiente. Debe observarse que "número" y "magnitud" nunca aparecen en el mismo libro, con excepción del Libro X, por lo cual es de particular interés. Aristóteles había establecido que no se pueden aplicar los resultados de la aritmética a las magnitudes a menos que éstas fueran números. La proposición X-5 dice: las magnitudes conmensurables tienen, la una a la otra, la razón que un número tiene a otro número. La prueba no parece adecuada pues en ella Euclides aplica la definición VII-20 para las magnitudes conmensurables que pueden representarse con una línea; sin embargo, esto es precisamente lo que Aristóteles considera válido: los resultados de la aritmética pueden aplicarse a las magnitudes conmensurables ya que éstas pueden ser pensadas como números. Pero desde el punto de vista matemático Euclides

[9] W. -W Rouse Bell, *Histoire des Mathématiques*, édition française revue et augmentée par L. Freund, Paris, Hermann, 1906, vol. 1, p. 56.
[10] Charles V. Jones, "La influencia de Aristóteles en el fundamento de *Los Elementos* de Euclides", *Mathesis* 3, n. 4, 1987, p. 375 ss.

debió mostrar primero que la proporcionalidad definida en V-5 incluye a la VII-20. Y esto es posible: la proporcionalidad en el primer caso se reduce a relaciones numéricas si, y sólo si, las condiciones de igualdad se cumplen. Pero sobre todo interesa buscar una explicación de por qué X-5 fue presentada de este modo. Tal vez pueda comprenderse recurriendo a Aristóteles, quien en un largo pasaje de la Metafísica describe la "medida" como término no analizado que debe ser asumido por quien lo escucha. Y éste es el caso cuando el término se usa en matemática. Entonces "medida" ocupa una "posición estratégica" en las dos teorías de proporciones de Euclides: es el concepto básico que se usa en las definiciones de ambas para definir "parte", "partes", "múltiplo" e incluso la prueba de X-5[11].

Por otra parte, la exigencia de la homogeneidad no es exclusiva de Euclides, sino que se remonta a una de sus fuentes, Eudoxo de Cnido, y tiene relevancia, como se verá luego, en la teoría de las proporciones.

Sobre los antecesores de Euclides y su uso en los *Elementos* hay diversas opiniones[12]. Para van der Waerden Euclides no es un gran matemático y las partes más difíciles e importantes de su obra fueron tomadas de otros autores, especialmente de Teeteto (Libros X y XIII) y de Eudoxo (libros V y XII). Estos libros, así como los libros aritméticos VII y IX son de muy alto nivel matemático, mientras que otros, como el VIII, son medianos y están muy debajo de este nivel. Por lo tanto, concluye, cuando la fuente es un buen matemático, como Teeteto y Eudoxo, su propio trabajo es excelente, pero cuando copia a un autor de menor rango, su promedio baja. No resulta fácil saber qué fue lo original suyo. Sin embargo Campos no piensa que Euclides sólo copiara a sus antecesores, porque su axiomatización de la geometría desplazó al olvido a sus predecesores, si bien admite[13] que los libros V (teoría

---

[11] Ibid. p. 380.
[12] Sigo aquí la exposición de Alberto Campos, *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*, Bogotá, 1994, p. 9 ss.
[13] Ob. cit. p. 14.

de la proporción para magnitudes en general) y XII (volúmenes de sólidos) de Euclides, calificados ambos como de nivel elevado, tienen como fuente a Eudoxo. Según Knorr, al que sigue Campos, los libros I, III y VI recogen la geometría jonia de Tales y Enópides, más o menos como figuraba en los *Elementos* de Hipócrates de Quíos. Las investigaciones de Teeteto y Eudoxo habían sido expuestas por Hermotimo de Colofón.

La obra se compone de 13 libros, casi todos comienzan con definiciones y continúan con enunciados de teoremas y sus demostraciones. Hay discrepancias en cuanto al número de postulados y nociones comunes que encabezan el Libro I. En este constan 5 postulados y 5 nociones comunes (axiomas). En los demás libros hay más definiciones, pero no más postulados ni axiomas[14]. Su estructura metodológica comprende:la lógica aristotélica, 5 postulados y 5 nociones comunes o axiomas.

En cada teorema se pueden señalar 5 partes: 1. un enunciado general; 2. una figura; 3. un enunciado particular, o sea, un enunciado como el hecho en 1, pero referido a una figura, que permite al lector seguir el razonamiento: 4. una construcción que

[14] Cf. las ediciones más autorizadas de Euclides, *Euclid's Elements.* The thirteen books of Euclid. Translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary by Thomas Eath. Second edition revised with additions. Volume I. Introduction and books I-II, 1925. Reprint 1956, Dover, New York (1ª ed. 1908); B. L. van der Waerden B.L., *Science awakening*, English translation, Noordhoff, Groningen, Holland, 1954. Según Rouse Bell (ob. cit., p. 56) el texto conservado de los *Elementos* proviene de una edición hecha por Theon, el padre de Hypatía, que enseñaba en Alejandría c. 380. De éstas y otras copias, incluso anteriores, surge que la disposición de definiciones, axiomas y proposiciones ha sido algo alterada, pero las proposiciones son las mismas. Como resultado de estas manipulaciones, añade, pudieron haberse producido las duplicaciones y repeticiones que señalan los investigadores: hay recomienzos en los libros 1, 2, 5, 7, 10 y 11; el teorema V-22 de proporciones entre magnitudes, demostrado con base en la teoría de la la proporción, como todos los del Libro V, es demostrado luego en IV-14 con base en propiedades de los enteros.

indica el trazado de líneas y figuras, para poder seguir la demostración; 5. una prueba: una cadena de razonamiento desde las hipótesis hasta el resultado anunciado (T).

Según el testimonio de Proclo se discutió mucho en la Antigüedad la diferencia entre axioma y postulado. Algunos opinaron que los axiomas se refieren a algo conocido, mientras que el postulado se refiere a algo hecho; conforme esto ni el 4º ni el 5º "postulado" de Euclides serían propiamente postulados. Según Gémino y Proclo, entre axioma y postulado hay la misma diferencia que entre teorema y problema. En un teorema se trata de determinar lo que se sigue de ciertas premisas; en un problema, de hallar una solución, o hacer algo. En el axioma, las cosas asumidas son propiedades esenciales y evidentes, como que el fuego es caliente; en el postulado, se trata de exhibir mediante una construcción una propiedad fácil de captar.

Para entender la disposición de Euclides hay que tener en cuenta que él, como los griegos en general, distingue netamente números y magnitudes como ya se ha visto, pero también hay un tratamiento geométrico de los números. Además, conforme recuerda Mankiewicz, para Euclides "números" significa siempre números enteros"[15].

Estas y otras limitaciones de la obra capital de Euclides[16] han propiciado diversas objeciones. Resumiendo las que se le hicieron hasta principios del s. XX, Rouse Bell las ordena del modo siguiente[17]: 1. las definiciones y axiomas contienen muchas

---

[15] Richard Mankiewicz, *Historia de la matemática. Del cálculo al caos*, Bs. As.-México, Paidós, 2000, p. 31.
[16] Ya señalaba H. Wieleitner, *Historia de la Matemática*, traducción de Carlos Mendizábal Brunet, Barcelona-Bs. As. Ed. Labor, 1928, p. 39, que los *Datos* de Euclides no contienen nada que no se halle en los seis primeros libros de los *Elementos*, pero conducen a la aplicación del método analítico procedente de la innovación del método iniciada por Platón.
[17] Ob. cit., p. 57.

suposiciones que no son evidentes; 2. presenta en general una prueba sintética, sin el análisis que le ha permitido inferirlas; 3. no intenta ninguna generalización de resultados (salvo VI-33, pero es de Theon y no de Euclides); 4. podría haber empleado más y más ventajosamente el principio de la superposición como método; 5. la clasificación de proposiciones deja que desear; 6. la obra es larga y prolija sin necesidad. Los estudios del s. XX han tendido a explicar estas limitaciones, sea por problemas de composición, redacción y/o transmisión, sea por posible yuxtaposición de fuentes o por criterios implícitos y asunciones culturales del entorno. En todo caso la historia de esta obra central de la matemática aún no se ha cerrado.

Excursus 2. La transmisión sirio-árabe

La historia de la matemática medieval (en sus dos grandes ramas, aritmética y geometría) no es homogénea. Sin embargo hay algunos elementos comunes que deben ser indicados, aunque no sea posible analizarlos en profundidad. El primero es que desde la época clásica, los *Elementos* de Euclides en particular, y el método geométrico en general, han gozado de una posición especial, por cuanto se lo consideró un modelo del método deductivo. Otro elemento común es la mediación transmisora de la cultura sirio arábiga del Medio Oriente tardoantiguo. La adecuada visualización del modo como estos transmisores receptaron y entendieron la matemática griega es muy importante para comprender el modo cómo se desarrolló la recepción latina.

Del gran aporte sirio-árabe a la historia de la ciencia medieval latina[18], sólo destacaré la importancia de Al- Jwarismi, quien

---

[18] Hay varios trabajos importantes sobre el paso de la ciencia griega a los árabes; por lo que hace a la matemática, es especialmente importante la síntesis del estado de la cuestión contenida en Roshdi Rashed, *Optique et mathématiques. Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum, 1992, el capítulo "Problems of transmission of Greeck scientific thought into Arabic".

introdujo el cálculo indio (después llamado algoritmo)[19]; luego tres hermanos (Banu Musa: Abu Ga'far Muhamad, al- Hasan y Ahmad) en el s. IX se interesaron por problemas matemáticos y físicos y escribieron el "Libro de los tres hermanos sobre la geometría", que fue traducido por Gerardo de Cremona como *Liber trium fratrum de geometria*. Su verdadero título es "Libro del cálculo de las figuras planas y esféricas", donde aparece por primera vez de modo constatable el uso del método griego de exhaustión[20]. Un tercer hito, ya en el s. XII, es Sharaf al-Din al-Tusi, estudiado también por Rashed[21].

Excursus 3. La matemática latina altomedieval

Hay un consenso establecido entre los historiadores de la ciencia medieval sobre el mayor atraso relativo de la matemática. En la tajante expresión de Carreira "nada especial aconteció en la Europa de los ss. V a IX"[22]; desde los últimos siglos romanos hasta el renacimiento de los ss. XII y XIII la matemática teórica fue prácticamente inexistente. Una historia de la matemática medieval que se reduzca a encarar la disciplina sólo desde el ángulo de la ciencia, no alcanza para esclarecer el pensamiento de la época. Las nociones geométricas -más que las aritméticas- sitúan su historia medieval en una interfase de experiencias intuitivas y tratamientos racionales que hace difícil precisar el límite entre las prácticas inductivas y las analítico deductivas.

---

[19] Su obra ha sido editada en M. Ibn Musa Al-Khwarizmi, *Le calcul indien (algoritmus)*, Paris, Blanchard, Société des études Classiques, 1986.
[20] Cf. Adolf P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes (VIII-XV siècles)*, traduction par M. Cazenave et K. Jaouiche, préface de René Taton, Pris, Vrin, 1976.
[21] *Sharaf al-Din al- Tusi: oeuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XII siècle*. Ed. et trad. Roshdi Rased, Paris, Les Belles Lettres, 1986, 2 v.
[22] Eduardo Carreira, "Límites e grandezas do pensamento geométrico na Idade Média", Lênia Marcia Mongelli (coord.) *Trivium et Quadrivium. As artes liberais na Idade Média*, Cotia, Ibis, 1999, p. 203

El renacimiento del s. IX (época carolingia) incluyó una tentativa de recuperar la enseñanza y el cultivo de las artes liberales, pero con poco resultado en lo que respecta a la matemática. Se aprecia que en esta época la matemática en particular (y las artes liberales en general) fue objeto de una valoración ambivalente: por una parte representaban la universalidad en cuanto ideal erudito, por otra no escapaban a la fragilidad de su concreción. En realidad, la base de este resurgimiento fue el *De artibus ac disciplinis liberalium literarum* de Casiodoro, cuya parte geométrica es muy pobre.

La obra de Martianus Capella *De nuptiis Philologiae et Mercurii et septem artibus liberalibus libri IX* define el septenario y usa el simbolismo geométrico que encanta a los medievales y lo vincula con las virtudes. No era geómetra y no significó un avance para esta disciplina, a la que no reserva más espacio que otros autores romanos que tampoco eran geómetras. Sólo hace breves referencias a Euclides, pero no usa sus demostraciones. Según Casiodoro, Capella había escrito un libro dedicado exclusivamente a la Geometría, pero no es cierto. El texto llamado *Geometría de Boecio* trata en realidad de agrimensura y reproduce algunos fragmentos de Euclides; no parece ser anterior al s. IX. La enciclopedia de Casiodoro, a pesar de la pobreza de su parte matemática, pasó a ser el referente altomedieval de esa disciplina. Sólo desarrolla una explicación simplificada, con unas pocas definiciones, y fuentes todas griegas (Euclides, Apolonio y Arquímedes), releídas desde Boecio[23].

En definitiva, desde el punto de vista de la historia de la matemática, el mentado "renacimiento carolingio" en realidad sólo aportó algunos trabajos como el *Propositiones ad acuendos inveniens*, probablemente de Alcuino de York. La recepción del *quadrivium* resultó una yuxtaposición poco ordenada de nociones de astronomía, cosmografía y matemáticas, pero sobre todo con

[23] Cf. Carreira, ob. cit. p. 225.

interés en sus aplicaciones[24]. El estudio de la aritmética se reducía a las reglas para realizar las operaciones básicas con la ayuda del ábaco. Los números se representaban en él de izquierda a derecha las unidades, las decenas, las centenas, etc. Las fichas se ponían de arriba hacia abajo hasta 10. Para sumar, se representan con fichas los dos números, una abajo del otro. Cuando la suma de los dos excede el diez, se sacan las diez fichas y se coloca una en el lugar de las decenas, dejando las excedentes. Siguiendo el mismo procedimiento con las restantes se tiene el resultado[25]. El mismo principio se sigue en el método más sencillo para multiplicar, que es por duplicación, lo que significa reducirlo a la suma. Por ejemplo 132 por 73: se duplica 132: 1 vez, 2 (264), 4 (528), 8 (1056), 16 (2112), 32 (4224), 64 (8448); aquí hay que detenerse porque el doble de 64 excede a 73. El multiplicador, 73, se escribe como suma de los números de la primera columna: 1 + 8 + 64 y se hace la suma de los números resultados: 132 x 73 = 132 (1) + 1056 (8) + 8448= 9636[26].

Otro método, mejor para grandes cantidades, se basaba en la propiedad distributiva de los números[27]. Por ejemplo 53 x 24:
35 = 3 x 10 + 5
24 = 2 x 10 + 4
entonces 35 x 24 = (3 x 10 + 5) x (2 x 10 +4)

La situación no parece haber mejorado mucho dos siglos después, conforme al antiguo pero valioso estudio de Paul

[24] Este tema ha sido estudiado por P. L. Butzer y D. Lommann, *Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times*, Birkhäuser, 1993, donde se traza un panorama histórico de las ciencias matemáticas en la Europa latina, en Bizancio y en el mundo musulmán, a principios del s. IX
[25] Cf. César Polcino Milies, "Contar, calcular, comprender: a Aritmética na Idade Media", Lênia Marcia Mongelli (coord.) *Trivium et Quadrivium. As artes liberais na Idade Média*, Cotia, Ibis, 1999, p. 177 ss.
[26] Ibid. p. 181.
[27] Ibid. p. 182.

Tannery[28] sobre una correspondencia de escolarcas c. 1025, la cual muestra, según concluye, que no sobrepasaron el nivel de los griegos contemporáneos de Pitágoras. Luego de la época de decadencia y de silencio teórico, en el s. XI comienza a verse un movimiento de recuperación intelectual de la geometría, que tuvo un ejemplo en Gerberto de Aurillac (950-1003). Residió en Barcelona c. 970, y en 999 es elegido Papa como Silvestre II. Es el primer científico que divulgó en Occidente las cifras árabes sin el cero, pues había introducido el ábaco árabe que opera con fichas que llevan grabadas las nueve cifras o letras equivalentes y esto era el "algoritmo" de los medievales, tipo de cálculo en que el cero no es necesario. Cuando se hacía sobre arenilla se llaban "cifras gubar" (de *gubar*: polvo en árabe)[29]. Su aporte sigue siendo una matemática "ingenua", pero da muestras de creatividad.

Notker Labeo (950-1022) tradujo nuevos materiales de Capella y comentó a Boecio mejor que sus antecesores; Franco de Lieja (1013-1054) se interesó por el problema de la cuadratura del círculo y ya no pensaba seguir sólo a Boecio; Hermannus Contractus (1013-1054) inventó un curioso juego de "combate de números" con figuras geométricas de relaciones numéricas en escalas progresivas. Fulberto de Chartres (990-1029) y Hermann de Reichenau (c. s. XI) y otros anónimos comienzan a buscar un rescate más sistemático y consciente[30].

Excursus 4. La introducción de Euclides y la revitalización de la matemática medieval

[28] "Une correspondence d'Écolâtres du XI siècle", *Memoires scientifiques*, Paris, Gauthiers-Villars, 1922, T. 5, *Sciences Exactas au Moyen Age*, cap. 10 (pp. 220-300).
[29] Cf. Julio Rey Pastor y José Babini, *Historia de la matemática*, V. I. *De la Antigüedad a la Baja Edad Media*, prefacio de Juan Vernet, Barcelona, Gedisa, 2ª ed. 1997, p. 175 y Jean-Paul Collette, *Historia de las matemáticas*, México, Siglo XXI, 1986, T. 1, p. 224.
[30] Cf. Carreira, art. cit., p. 242 ss.

Es un tópico conocido entre los historiadores de la filosofía medieval, que la traducción y difusión de la obra de Euclides en el s. XII produjo una ola de admiración por el método, lo que determinó la "moda" del *more geométrico* evidenciada por diversos pensadores anteriores a la incorporación de los *Segundos Analíticos* aristotélicos y con ellos la consolidación de una metodología científica más adelantada. Como bien expresa Carreira[31], más que uno u otro factor (la influencia directa de las obras árabes o las traducciones) fue una suma de factores lo que permitió el redescubrimiento de la matemática teórica.

Entre los pioneros trasmisores del saber árabe a la latinidad se encuentra Adelardo de Bath, quien a principios del s. XII tradujo el *Liber Ysagogarum Alchorismi* de Al- Jwarizmi y en 1126 tablas astronómicas (que implican conocimientos bastante adelantados de trigonometría). El *Álgebra*, del mismo autor fue traducida en Segovia por Roberto de Chester, en 1145. El primer trabajo completo de Arquímedes traducido del árabe al latín fue *De mensura circuli*, a mediados del s. XII, probablemente por Platón de Tívoli (c. 1160). Guillermo de Moerbecke tradujo en 1269 *De sphaera et cylindro* a partir de originales griegos.

Los *Elementos* de Euclides comenzaron a traducirse a principios del s. XII[32], entonces añadiendo dos libros apócrifos a los trece auténticos. En este siglo circularon tres traducciones del árabe, la de Adelardo de Bath, con la revisión de Juan Campanus de Novara (c. 1254), la de Herman de Carintia y la de Gerardo de Cremona (en Toledo). En el mismo siglo fue traducido (no se ubica al traductor) el Pseudo Euclides *Liber Euclides de Ponderoso et Levi* (estática)[33].

---

[31] Ibid. p. 243.
[32] Carreira señala (ob. cit. p. 242) que Euclides había sido traducido al latín en Inglaterra c. 925 en la época de Aethelstan, y no por mediación árabe. Pero esta versión no se difundió, que sepamos, y en todo caso fue relegada por la de Adelardo.
[33] Cf. Alistar C. Crombie, *Historia de la Ciencia. De San Agustín a Galileo. I. La Ciencia en la Edad Media, ss. V al XIII*, Versión española

Sin duda la traducción más importante es la de Adelardo, y también la más difundida en su tiempo. Hay distintas versiones de los *Elementos* traducidos por él, que han sido estudiadas por John E. Murdoch[34]. Una primera versión, que Clagett llama "Adelardo I" parece traducción de un original árabe; además, el "Adelardo II", con el texto ordenado en proposiciones y que es una forma de *commentum*, su lenguaje es más cuidado y meta-matemático. La tercera versión, "Adelardo III", es lo que Roger Bacon llamó "editio specialis", con ampliaciones. La redacción final estuvo a cargo de Campanus de Novara, último miembro de la tradición adelardiana. Murdoch señala algunas diferencias con el original griego: faltan algunas proposiciones del original, el orden está cambiado y hay alguna interpretación errónea de las proposiciones. Según este investigador[35] no es esto lo más importante sino los añadidos que muestran la expansión de la matemática antigua en el mundo islámico.

La reintroducción de Euclides abre un período de revitalización de la matemática que incluye varios aspectos y nombres asociados.

Uno de ellos es la definitiva instauración de los números arábigos y del cero. A principios del s. XIII, en 1202, Leonardo Fibonacci de Pisa, en su *Liber Abaci* presenta la primera exposición completa de los numerales indo arábigos. Consta de nueve capítulos con la siguiente temática: 1. Las nueve cifras "hindúes" y el cero, regla de cálculo digital y tablas de suma y multiplicación; 2 a 5: operaciones con enteros: multiplicación, suma, resta y división, en ese orden; 6-7 operaciones con fracciones, descomposición de fracciones en suma de fracciones unitarias; 8-9 aplicaciones y problemas[36].

---

de José Bernia, revisión de Luis García Bnallester, Madrid, Alianza Editorial, 1974, pp. 48-59.

[34] "The Medieval Euclid: salient aspects of the translations of the *Elements* by Adelard of Bath and Campanus de Novara", *Revue de Synthèse* (XII Congres Int. d'Hist. des Sciences) 9 (s-g-) 494-52, (3ª s.) 1968: 67-94.

[35] Art. cit. p. 80.

[36] Rey Pastor-Babini, ob. cit., p. 186.

Además de Fibonacci los usaron Alexandre de Villedieu (c. 1225) un franciscano francés y Juan de Sacrobosco (c. 1200-1256)[37]. John de Holywood (Sacrobsoco) enseñó en París c. 1230 y escribió *Algoritmus vulgaris* o *Tractatus de arte numerandi.* Es un texto que trata la numeración, adición, sustracción, división por 2, duplicación, multiplicación, división, suma de los números naturales y de impares y extracción de raíces. Es elemental pero contribuyó a la difusión de las cifras arábigas y de la numeración decimal[38].

Otro autor relevante es Jordano de Némore (Jordanus Nemorarius)[39], cuya obra más interesante para los actuales historiadores de la matemática es *De numeris datis*, escrito probablemente en 1225 y editado críticamente por Hugues[40]. Considerando que el *De numeris* es un álgebra medieval avanzada, se pregunta el editor por qué no escribió un álgebra elemental; tal vez porque estaban disponibles las traducciones de Chester del *Álgebra* de al-Jwarizmi (1145) o el *Liber abaci* de Fibonacci (1202). Jordano conocía también los *Elementos* y los *Data* de Euclides, y posiblemente fue este último el que lo indujo a escribir su obra. No conoció la *Aritmética* de Diofanto, descubierta en 1464 por Regiomontanus, y difundido sólo desde comienzos del s. XVII. La obra de Diofanto incluso fue conocida en Bizancio en tiempos de Planudes (1260-1310) pero posterior a Jordano. Roshdi Reshed ha descubierto cuatro de los libros de Diofanto que se consideraban perdidos, en una traducción árabe del s. IX que parece comprendía también los tres primeros. En todo caso sólo se

[37] Cf. Carl B. Boyer, *Historia de la Matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 1986, p. 323.
[38] CF. Rey Pastor-Babini, ob. cit., p. 179.
[39] No se sabe casi nada de la vida del autor, ni siquiera dónde vivió, a excepción de la constancia de su paso por Toulouse. Se le adjudican las siguiente obras: *Dde numeris* datis, *Demonstratio de algoritmo* (sobre el sistema de numeración árabe), *Demonstratio de minutiis* (sobre fracciones), *Liber phylotegni de triangulis* y *Demonstratio de plana spera* (sobre geometría) y *De elementis arithmetice artis* (aritmética teórica).
[40] Barbabas B. Hugues, ed. *Jordanus de Nemore 'De numeris datis'*, Berkeley Ca., University of California Press, 1981.

puede inferir que Jordano haya sabido indirectamente de esta obra a través de los autores árabes que conocían su traducción[41].

El *De numeris datis* consta de cuatro libros con tres definiciones y 115 proposiciones repartidas así: Libro 1, 29 proposiciones sobre ecuaciones simultáneas o ecuaciones cuadráticas; Libro 2, 28 proposiciones sobre proporciones; Libro 3, 23 proposiciones sobre proporciones continuas; Libro 4, 35 proposiciones con ecuaciones simultáneas y cuadráticas. No hay introducción ni nada que explique la finalidad de la obra, y al final sólo un escueto cierre.

Esta obra usa a la par letras (como enseguida se dirá) y números, en la tercera parte de las proposiciones (lo que no tiene correspondencia en Euclides), con lo cual dicha parte es de hecho un problema. En los ejemplos numéricos se usa generalmente el sistema romano, pese a que había escrito la *Demonstratio de algoritmo* sobre la numeración árabe.

El segundo aspecto es la evolución de los sistemas de notación y de las fórmulas. Retomando la notación con letras para representar números, es posible formular teoremas algebraicos. Conforme explica Boyer[42], en la antigüedad y la Edad Media las ecuaciones cuadráticas se clasificaron en tres tipos:
1. $x^2 + px = q$
2. $x^2 = px + q$
3. $x^2 + q = px$

Y las ecuaciones cúbicas pueden ser:
pura $x^3 = 0$

---

[41] Cf. Luis Puig, "El *De numeris datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos", *Mathesis* 10, 1994, p. 50.
[42] Carl B. Boyer, *Historia de la Matemática*, Madrid, Alianza Editorial 1986, pp.57-58. Advierte (p. 56) que las ecuaciones cuadráticas ya eran conocidas en la Mesopotamia como probó Neugebauer.
Forma de ecuación cuadrática: $x^2 + px + q = 0$ (p y q son números positivos), pero esta ecuación no tiene raíces positivas.

mixta $x^3 + x^3 = a$
general $ax^3 + bx^2 + cx = d$

El uso de letras y la formulación algebraica es constante aunque un tanto equívoco en Jordano, ya que a veces usa dos letras para representar un número (como Euclides) y a veces una sola. Las características propiamente árabes del álgebra se encuentran en *De numeris datis*, cuya colección de reglas algebraicas permite calcular, a partir de un número dado, otros relacionados con él. Algunas son ecuaciones simples o de segundo grado con más de una incógnita[43]. En el enunciado (como en la *Aritmética* de Diofanto), nunca aparecen números concretos. Y a diferencia de Diofanto, tampoco aparecen números concretos en el argumento y las cantidades a menudo son designadas por letras. Aunque el uso de letras para designar números ha sido considerado un elemento algebraico de la obra, sólo se usa en un tercio de las proposiciones y nunca en los enunciados, lo mismo que en la *Arithmetica*, que es una obra más bien filosófica, al estilo de Boecio.

Un tercer aspecto es el desarrollo teórico de los diversos temas. Indudablemente Jordano ha desarrollado un esquema, que aplica rigurosamente en *De numeris datis* para la exposición de las proposiciones o teoremas. El formato de las proposiciones siempre tiene tres partes[44]: 1. un enunciado que afirma que si han sido dados unos números (o razones) -entre los que unas determinadas relaciones han sido dadas- entonces otros números (o razones) también han sido dados; 2. unas transformaciones de los números (o razones) y las relaciones que, o bien muestran que los números efectivamente están dados o bien los convierten en números y relaciones de las hipótesis de alguna proporción anterior; 3. el cálculo de un ejemplo con números concretos, que ya mencioné.

[43] Según Rouse Bell (ob. cit. p. 180) muestra conocer la teorías de las proporciones, pero muchas de las demostraciones son simplemente ejemplos numéricos. Investigadores posteriores valorizan más este abordaje.
[44] Cf. Puig, art. cit. pp. 50-51.

Este tratamiento significa sin duda un avance, pues permite ir más allá de la ilustración sobre el modo de calcular el resultado de un problema. En este sentido, como observa Puig[45], puede decirse que las proposiciones de Jordano son útiles para el análisis como lo es una caja de herramientas. Desde ese punto de vista lo que es útil son los resultados: cualquiera que quiere resolver un problema aritmético y utilice el análisis, debe reducir lo desconocido a datos; las 115 proposiciones de la obra le proporcionan otros tantos atajos, ya que si se encuentra con un caso en las condiciones allí enunciadas, entonces sabe cómo reducir a datos. Pero si además se quiere que el libro sirva como ejercicio en el arte del análisis, no hay que retener los resultados sino las técnicas de análisis. En ese caso hay que observar los mecanismos de análisis, que aparecen no en el enunciado de las proposiciones sino en la segunda parte de ellas, en los argumentos.

Excursus 5. La teoría de las proporciones

La teoría de proporciones fue la herramienta básica de la matemática griega, como actualmente lo es el álgebra pero su génesis y la forma en que aparece en Euclides ha sido objeto de variadas investigaciones. Por una parte Jones atribuye la existencia de dos teorías de las proporciones distintas a la irreductibilidad -de origen aristotélico- entre números y magnitudes. Precisamente considera que el caso más claro de las definiciones separadas es el de la proporcionalidad: definición 5 del libro V y 20 del libro VII[46]. La del libro V es general y la del VII es especial. Según él, la pregunta de por qué las duplica y por qué no redujo la teoría aritmética de la proporción a la teoría geométrica como un caso especial, muestra más bien nuestra tendencia al reduccionismo. Los griegos conocieron dos ciencias irreductibles en las matemáticas, que Aristóteles había probado ser independientes. La aritmética tenía una teoría de proporciones bien establecida, pero no adecuada para la geometría. Sin embargo, agrega, la negativa al reduccionismo no es absoluta: la proposición X-5 asume que

---

[45] Ibid. p. 54.
[46] Jones, art. cit., pp. 377-380.

podemos subsumir las magnitudes en los números, dando las condiciones. Con visión actual podríamos decir que se debería proceder al revés: hacer la aritmética parte de la geometría, debido a la mayor generalidad de esta última. Y este es el punto de vista que asumen muchos comentadores de Euclides, pero que obstaculiza la comprensión del propio Euclides histórico. Y en definitiva, según Jones, la teoría que expone Euclides es la que desarrolló Eudoxo.

Por otra parte Campos[47], siguiendo a Wilbur Knorr, considera que hay dos nociones de proporción, una de Hipócrates de Quíos y otra de Eudoxo, y las dos coexisten en los *Elementos*. En los libros 1 y 6 las nociones de congruencia y similaridad toman el tratamiento de Hipócrates. No es que -contra la opinión de algunos- la primera noción de proporcionalidad haya sido desterrada de los *Elementos* a causa a causa de los ataques de los sofistas, sino que Euclides tuvo que hacer ajustes, tal vez no siempre cuidadosos. Hay poca afinidad entre estos libros de la primitiva geometría griega y los otros sobre los que se apoya directamente la teoría de la incomensurabilidad (tratada en el Libro X, teniendo como fuente a Teeteto), y es curioso que no quede traza del llamado "escándalo de los irracionales".

Además, incluso la cuestión de si, en la parte que tomó de Eudoxo[48], Euclides lo siguió o lo reformuló también hay interpretaciones dispares. Ya he mencionado a Campos en el primer sentido. Debo incluir también, en similar dirección y en la

---

[47] Ob. cit. p. 9. En su criterio el libro V se puede considerar como una renovación de la teoría de la proporción para fundamentar mejor la geometría de los Libros VI (solución geométrica de ecuaciones cuadráticas; las 4 operaciones con razones) y XI (geometría espacial: rectas, planos y paralelepípedos).

[48] Recordemos que se atribuyen a Eudoxo de Cnido (c. 408-355 ac), miembro de la Academia de Platón, dos descubrimientos matemáticos importantes: la teoría de las proporciones y el método de exhaustión y que ambos están en él muy relacionados.

línea de investigar la relación Eudoxo-Dedekind, a Leo Corry[49], que parte del concepto euclidiano de **razón** en la definición V-4: dícese de dos magnitudes que ellas están en razón, si es posible, al tomar un múltiplo de la otra, sobrepasar la otra. La razón es, pues, la relación básica entre magnitudes y la teoría de las proporciones facilita comparar entre sí diferentes espacios geométricos. Por eso Euclides cita reglas para la proporción así como condiciones de uso. Entonces la definición V-5 indica las condiciones para considerar dos razones como idénticas. Aprecia que su redacción un tanto confusa ha dado origen a muchas explicaciones, e inclusive no resulta fácil la traducción. La definición V-6 introduce el término "proporción" para denominar magnitudes que están, dos a dos, en la misma razón[50].

Al definir proporción, Eudoxo-Euclides establecen condiciones para la existencia de una razón entre dos magnitudes dadas y para determinar cuándo, de dos tales razones dadas, debe decirse que son una y la misma. Pero en los *Elementos* no encontramos las definiciones mismas de magnitud o de razón, excepto la definición 3 que es vaga: una razón es una especie de relación entre los tamaños de dos magnitudes del mismo tipo. Las "magnitudes del mismo tipo", después llamadas "magnitudes homogéneas", son magnitudes capaces de entrar en relación mutua y esto sucede conforme lo establece la definición 4, según la cual se puede buscar la razón entre dos líneas, o entre dos áreas, o entre dos volúmenes. Basta tomar una de ellas y agregarla a sí misma un número suficiente de veces hasta sobrepasar la otra. Esto puede hacerse con una línea respecto a otra, por ejemplo, pero no entre una línea y un área. Lo mismo vale para las operaciones de

---

[49] Leo Corry, "La teoría de las proporciones de Eudoxo interpretada por Dedekind", *Mathesis* 10, 1994: 1-24.

[50] El significado de la definición eudoxiana de proporción en términos algebraicos modernos según lo propone el autor es:
$a:b = c:d$ si para todo par de enteros, m y n se tiene:

	$ma > nc$	si y sólo si	$mb > nd$
o	$ma < nc$	si y sólo si	$mb < nd$
o	$ma = nc$	si y sólo si	$mb = nd$

adición o sustracción. No hay productos de dos cantidades cuyos resultados sean de tipo diferente de los factores dados y esto fue un principio de esta ciencia hasta el s. XVII.

La exigencia eudoxiana tiene varias consecuencias, según Corry[51]. Primera: no se puede formar una razón entre una magnitud finita y una infinita, porque la infinita nunca será sobrepasada. Segunda: es posible, en cambio, comparar magnitudes inconmensurables. Ya en la época de Eudoxo se conocía la inexistencia de una medida común entre la diagonal y el lado del cuadrado, y por tanto la imposibilidad de representar la relación entre sus medidas por medio de relaciones entre números enteros. La definición de Eudoxo permite comparar tales medidas, no como relación entre números, sino como relación entre magnitudes homogéneas entre sí.

Tercera: imposibilidad de considerar la proporción como una igualdad de fracciones en el sentido operativo del término. Si la razón entre a y b es la misma que la razón entre c y d, en el sentido de Eudoxo, no se sigue directamente que $ad = bc$ ni que la razón entre a y c sea la misma que la razón entre b y d. De hecho, en el caso general estas últimas razones ni siquiera estarán definidas del todo. Pues si el par a,b es, por ejemplo, un par de líneas, mientras que el par c,d es un par de áreas, no es posible formar la razón a,c al no ser magnitudes homogéneas. Sí será posible en el caso de que las cuatro cantidades que forman la proporción sean homogéneas, pero éste caso no es una evidencia inmediata, sino que hay que probarlo como teorema (V-16). La proporción es, por tanto, una comparación entre dos diferentes razones dadas y no un esquema operacional entre cuatro cantidades numéricas.

A estas presentaciones del tema añado el estudio de Rubiera sobre Eudoxo[52]. La definición de proporción de Eudoxo es la V-5

---

[51] Ibid. p, 4

[52] Francisco Rubiera R., "La definición de proporción de Eudoxio", *Mathesis* 7, n. 4, 1991: 477-482. El objetivo final del artículo es mostrar la relación Eudoxo-Dedekind. Se ha sostenido que la definición de número

de Euclides según la cual dos magnitudes, *A* y *B* son proporcionales a otras dos, *C* y *D*, cuando equimúltiplos arbitrarios, *mA* y *mB*, de las dos primeras son respectivamente iguales, mayores o menores que los equimúltiplos, también arbitrarios, *nC* y *nD* de las dos últimas. O sea:

$mA = nC$	si y sólo si	$mB = nD$
$m'A > n'C$	si y sólo si	$m'B > n'D$
$m''A < C$	si y sólo si	$m''B < n''D$

En el primer caso $A/C = B/D$. Si esto sucede para un par de valores m,n, entonces y sólo entonces las magnitudes consideradas son conmensurables porque su razón es un número racional. En el segundo caso, sucede que $A/C > n'/m'$, $B/D > n'/m'$. En el tercer caso $A/C < n''/m''$, $B/D < n''/m''$ [53].

En cambio, Knorr presenta una historia más compleja del texto final[54]. En su concepto, la opinión tradicional de que la teoría de

---

real atribuida a Dedekind es una interpretación de la definición de proporción de Euclides, tal como la enuncia al principio del Libro V. Como aplicación se mencionan las proposiciones VI-1 y VI-2. De VI-2 y I-34 (los lados opuestos del paralelogramo son iguales) se puede deducir el teorema de Thales. La razón A/C de dos magnitudes representa la medida de *A* cuando *C* es la unidad, y es un número racional cuando *A* y *C* son conmensurables, pero es irracional cuando *A* es inconmensurable con *C*. La proporción $A/C = B/D$, que expresa la igualdad de dos razones, dice que ambas designan el mismo número real.

[53] Ibid. pp. 477-478. Para concluir, el autor sostiene que las razones A/C, B/D están definidas por la misma cortadura del conjunto ordenado de los números racionales; donde los racionales n'/m', menores que ambas razones, forman la clase "izquierda" de la cortadura, mientras que los racionales mayores n''/m'' forman la clase "derecha" de la propia cortadura. Esto significa, afirma, que la definición de número real propuesta por Dedekind es la misma que la presentada por Eudoxo. Esta conclusiòn ha sido cuestionada por otros investigadores, pero se trata de un tema ajeno a este estudio y que no invalida el análisis relativo a Eudoxo.

[54] Wilbur R. Knorr, "De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones", *Mathesis* 8, n. 1, 1992: 1-12.

Eudoxo sobre la proporción es la misma que se halla en el Libro V de Euclides plantea varias dificultades. La atribución a Eudoxo sólo está atestiguada en una glosa. Es también poco probable que Euclides se hubiera limitado a copiar una teoría establecida dos generaciones antes. Además, y sobre todo, la teoría del Libro V no aprovecha el método de la exhaustión (teorema del límite) del Libro XII que ciertamente es de Eudoxo. Hay dos cuestiones para plantear: 1. Cuáles son las diferencias que distinguen la teoría de Eudoxo de su presentación euclidiana; 2. Cómo se desarrolló la forma euclidiana a partir de la forma eudoxiana anterior.

Expone así -en términos modernos- el principio básico de la teoría euclidiana de la proporción (definición V-5 ya mencionada): para todos los enteros positivos m y n y para determinadas magnitudes A, B, C, D, se da $A:B=C:D$ si y sólo si $mA>nB$ como $mC>nD$ y de manera similar con = *y* <. La definición 7 da la condición para que las magnitudes **no** se encuentren en proporción: se dice que la primera magnitud tiene con la segunda mayor razón que la tercera con la cuarta, siempre que el múltiplo de la primera exceda al de la segunda, pero que el mismo múltiplo de la tercera no sea mayor que el mismo múltiplo de la cuarta. La respuesta a la primera pregunta es que la teoría alternativa de la proporción se originó cuando Eudoxio vio que la teoría de la proporción limitada a los números y a las magnitudes conmensurables podía ampliarse para abarcar el caso inconmensurable mediante la aplicación del razonamiento que ya estaba usando él en sus proposiciones sobre los límites[55].

Uno de los defectos conocidos de la teoría euclidiana en el Libro V es que no prueba que "no tener la misma razón" sea equivalente a "tener una mayor o menor razón". Pero de hecho a veces se supone esa afirmación (por ejemplo proposiciones V-9 y V-10) por lo que debe pensarse que así lo entendían tanto él como los geómetras que lo precedieron. Las formas eudoxiana y euclidiana de la teoría son equivalentes desde el punto de vista técnico. El motivo de la modificación podría haber sido la

[55] Ibid. p. 7.

simplificación. La forma euclidiana, aunque conceptualmente oscura (desconcertó a los comentaristas medievales) resultar sin embargo más fácil de aplicar que la técnica eudoxiana en las pruebas de la proporción (por ejemplo las pruebas del teorema del arco-sector). Otro motivo pudo ser la completez, porque la técnica de Eudoxo puede ponerse en práctica aun sin una definición general explícita de la proporción; pero los teoremas fundamentales relativos a la proporción, como los de las relaciones básicas de desigualdad entre razones (proposición V-8) no serían demostrables en esa forma, porque la técnica las presupone. Con todo, la revisión de la teoría introdujo algunas incongruencias 1. Las pruebas contenidas en el Libro XII (salvo XII-3) no usan la teoría de la proporción del Libro V; 2. La forma euclidiana de los teoremas sobre el ángulo y el sector del arco (VI- 33) no se ocupa del caso en que los múltiplos de los arcos, ángulos y sectores se tornan más grandes que la circunferencia entera, el ángulo completo (es decir, cuatro rectángulos) y el círculo respectivamente; 3. Hay una diferencia sutil en las dos formas de la condición de una "mayor desigualdad": la definición euclidiana no es constructiva, en el sentido de que da por sentada la existencia de múltiplos que producen las desigualdades expresadas, sin indicar cómo se obtienen. Al contrario, la técnica eudoxiana de hecho construye el equivalente y esto lo hace a través del lema sobre la obtención de la magnitud conmensurable intermedia[56].

La argumentación histórico crítica de Knorr es convincente en cuanto a la muy probable reformulación por parte de Euclides. Sin embargo, persiste también la observación de Campos de que, cualquiera haya sido la importancia de la tradición y de los matemáticos contemporáneos a Euclides, su sistemática desplazó a todas y se instaló definitivamente como la formulación estándar. Con ello quiero significar que cuando se reintroducen los *Elementos* en la cultura latina medieval, las posibles suturas, las reformulaciones, los añadidos (probablemente de Theon), es decir, todos lso elementos textuales que suscitaban alguna dificultad, no

---

[56] Ibid. p. 9.

indujeron a los medievales a pensar en diversidad de fuentes, sino en oscuridades redaccionales que los obligaban a despejarlas.

Excursus 6. La historia de la historia

Varios investigadores a principios del s. XX siguieron las huelles de P. Duhem en la búsqueda y análisis de fuentes, como A. Birkenmajer, A. Björnbo, M. Breyer, N. Buvnov, U. Chevalier, A. Clerval, G. Coleti, J. Drecker, C. Haskins, J. Heiberg, G. Hellman, C. Langlois, B. Lefebvre, G. Luquet, P. Mandonnet, R. Poole, J. Ruske, H. Suter, H. Zinner.

Uno de los puntos más importantes, sin duda, lo constituyen los trabajos de edición crítica con comentarios que se llevaron a cabo durante los primeros años del siglo pasado. Estos trabajos fueron pioneros en el sentido de aunar las dos exigencias metodológicas que en ese momento se consideraban básicas: el análisis textual y la interpretación actualizada. Por cierto, estos trabajos se orientan exclusivamente en la línea de la historiografía internalista. Problemas posteriores de la metodología de la historia de la ciencia son desconocidos. Por tanto, sería anacrónico opinar que estos autores desecharon las explicaciones externalistas cayendo en unilateralismos interpretativos; simplemente, como historiadores, tenían otros intereses. El mayor de ellos era precisamente el que he señalado: hacer comprensibles los textos antiguos en términos de matemática moderna, mostrando sus aproximaciones y diferencias. Podría decirse que pecaban de “presentismo”, pero creo que también esta crítica es desenfocada. Me parece que sin las bases que ellos pusieron hubiera sido imposible el ulterior y positivo desarrollo de todas las orientaciones de la historia de las matemáticas (y en general, de todas las ciencias).

La grandes síntesis de George Sarton (*Introduction to the History of Science*, Baltimore, I, 1927, II, 1931) y de L. Thorndike (*A History of magic and experimentl Science*, New York, 1923) pueden considerarse un resultado general de esta etapa de la investigación en historia de las ciencias. Todos ellos se hacen cargo de los problemas histórico críticos y hermenéuticos relativos a la trasmisión de la ciencia griega, vía los árabes, y su reintroducción y asimilación en el occidente latino. Los trabajos pioneros de Amable y Charles Jourdain, en la primera mitad del s. XIX, habían puesto el acento en la investigación sobre las traducciones latinas de Aristóteles. Más tarde se apreció un problema similar con respecto a los escritos árabes, como lo señalaron los importantes trabajos de M. Steinschneider (desde la década de 1870) sobre el influjo árabe en diversas disciplinas y lenguajes europeos y la investigación de F. Wüstenfeld (en la misma década) sobre las fuentes árabes de los escritos latinos a partir del s. XI.

La revista *Bibliotheca mathematica* fue un órgano muy importante de difusión de estas investigaciones, sobre todo en las dos primeras décadas del s. XX. Estas ediciones enriquecieron el panorama de los panoramas históricos, que hasta entonces eran muy parcos al referirse a los medievales. Por ejemplo Rouse Bell, que a principios del siglo pasado escribe un tratado extenso y pormenorizado de historia de la matemática, engloba la edad media latina escolástica en el período 1150-1450[57] incluyendo a los árabes ibéricos. En el s. XI sólo menciona a Azarquiel, en el XII las traducciones de Euclides por Adelardo de Batch y trata muy brevemente a Ben Ezra, Gerardo de Cremona (más bien como traductor) y Juan Hispano; y en el s. XIII: a Fibonacci, Federico II (como mecenas), Jordano, Sacrobosco, Roger Bacon y Campano de Novara. Sólo merecen exposicioens de cierta extensión Fibonacci y Jordano. La situación no era muy distinta en otros tratados anteriores a la obra de Tannery.

Se publicaron en esa época muchos trabajos de trascripción y análisis de fuentes tardoantiguas y medievales. En ese sentido las obras de Jordano, uno de los “clásicos” de la baja Edad Media, fue un tema esencial para los historiadores de principios del s. XX, al que Gustaf Eneströn dedicó varios trabajos, especialmente sobre la

[57] Ob. cit., p. 172 ss.

Demonstratio de Algoritmo, a partir de 1907; posteriormente se ocupó de él Louis C. Karpisnki, con varios trabajos publicados alrededor de 1920.

Pero Jordano, aunque siempre fue el más estudiado, no fue el único. Se investigaron otras fuentes, buscando un conocimiento más completo de las dos grandes direcciones de la aritmética medieval: la teoría de los números enteros y la de los fraccionarios. En este aspecto, es de capital importancia establecer el influjo de la reintroducción de los *Elementos* de Euclides en Occidente, a partir e la traducción hecha por Hermán. Son importantes los trabajos de Karpinski sobre Sacrobosco, Juan der Meurs y Roberto de Chester.

Un investigador que trabajó especialmente en esta dirección fue Eneström, publicando diversos artículos en esta *Biblioteca Mathematica*. Su método resulta indicativo del tipo de abordaje que se consideraba más importante. Publicó dos trabajos del Maestro Gernardo sobre cálculo. Este casi desconocido escolarca contemporáneo de Jordano representa también un hito importante en la historia del desarrollo de los *Elementos* en la cultura latina. Esta investigación sobre su obra fue un aporte a la comprensión de la aritmética superior en el s. XIII. El cálculo de fracciones, la parte más compleja de la teoría de los números, fue desarrollada por Gernardo a partir de las demostraciones del Libro V de los *Elementos*. Pareciera que Gernardo, implícitamente, coincide con los historiadores actuales que consideran a este libro como el mayor logro de la geometría euclidiana. Gernardo aprovecha una de sus características, la de presentar una noción de magnitud que cubre cantidades de diversos tipos, de modo que sus proporciones valen para todas ellas. Una segunda nota relevante es que, aun sin introducir el concepto, de hecho abarca las magnitudes inconmensurables, con lo cual llenó una importante laguna de la matemática griega anterior a él y esto también se aprecia en el tratado de Gernardo. Pero las generaciones posteriores a él consideraron que la teoría de las proporciones del Libro V sólo se aplica a la geometría, y por tanto, sólo ella se constituía como una ciencia rigurosa de las cantidades, relegando a la aritmética.

Debemos aguardar al Renacimiento para la aparición de un tratamiento sistemático de los números irracionales. Sin embargo, los tratados sobre las fracciones o quebrados que se elaboraron durante los dos siglos anteriores y a partir de la deducción de teoremas basados en demostraciones de este Libro V, pueden y deben considerarse pasos relevantes en ese camino aritmético en paralelo que arribará finalmente al álgebra estandarizada. En esta historia Gernardo tiene un lugar.

El trabajo de Eneström sobre Gernardo incluye la edición completa de dos partes de la obra del escolarca: el *Algorismus de integris* y la parte relativa al cálculo de fracciones *Algorismus de minutiis*, ambos en la misma revista[58]. El *Algorismus de minutiis* fue editada a partir del manuscrito de Paris que es la obra aritmética completa. Esta parte contiene la deducción de 42 teoremas, con su enunciado y correspondiente justificación. En una primera parte, que abarca los primeros 16 teoremas, se explica qué es "proporción" o "razón", la formación y clases de fracciones, diversas proporciones y operaciones con fracciones: suma, resta y multiplicación. Los temas que siguen son: división, potenciación (cuadrado y cubo) y raíz. Eneströn da un versión matemática moderna de cada teoremas. El lector puede apreciar cómo se interpretan los textos originales -de redacción a veces bastante confusa- en notación moderna. De este modo los historiadores de la matemática no medievalistas, pueden acceder a la comprensión del texto y ubicarlo adecuadamente en el proceso histórico. Las síntesis de historia general de la matemática producidas en la segunda mitad del s. XX son obviamente deudoras de estos aportes puntuales imprescindibles. Gernardo no ha merecido mayor atención, después de Eneström; Karpinski se ocupó algo de él en un breve trabajo[59]; recientemente hay un brevísima referencia en

[58] "Der *Algorismus de integris* des Meisters Gernardus", *Bibliotheca mathematica*, 13. n. 3, 1912-1913: 284-332 y "Der *Algorismus de minutiis* des Meisters Gernandus ", *Bibliotheca Mathematica*, 14, 1913-1914: 99-149.

[59] "Two Twelfth Century algorism", *Isis* 3, n. 3, 1921: 396-413.

un trabajo panorámico crítico de Hoyrup[60]. Esto confirma la aseveración de Juan Vernet, prologista de la última edición de la historia de Pastor-Babini, que las investigaciones más interesantes de los últimos treinta años se han producido en los dos extremos de la historia, en la antigua ciencia babilónica y en la matemática contemporánea[61]. Los medievales han quedado, una vez más, en la sombra.

Esta propuesta

La divulgación de fuentes para su mayor conocimiento y correlativa motivación al estudio del pasado de la matemática es una tarea en la que hacen falta no sólo las grandes síntesis sino también los trabajos puntuales. Considerando que la obra de Gernardo merece una mayor atención y que su comparación sistemática con la más estudiada de Jordano arrojaría luz sobre este interesante y poco transitado capítulo de la historia de la matemática occidental, presento en las páginas que siguen la edición de Eneström del original latino y mi traducción acompañada de breves comentarios que no pretenden ahondar en los aspectos más técnicos sino dar un marco de lectura apropiada, para lo cual acompaño la trascripción moderna propuesta por el editor[62]. He procurado la mayor literalidad, aun a costa de la elegancia, de modo que la traducción refleje las peculiaridades lingüísticas del original. La tentación de "aligerar" la traducción para hacerla más grata a los lectores contemporáneos conlleva peligros que han sido señalados muy concretamente por Luis

[60] Jens Hoyrup, "The formation of a myth: Greek mathematics-our mathematics" disponible en Internet: http:akira.ruc.dk/-jensh/Publications
[61] Ob. cit, p. 1.
[62] Las referencias a Euclides han sido tomadas de la traducción castellana Euclides, *Elementos*, Libros, Introducción de Luis Vega, traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños, Madrid, Gredos, 1991, Tomo 1, Libros I- IV, Tomo 2, Libros V-IX, de donde alguans otras referencias. Me he servido también de *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, editi da Federigo Enriques, Bologna, Incola Zanichelli editore, Libro V-IX, 1930, especialmente para la compulsa y algunas formalizaciones.

Puig[63]. He procurado, por tanto, evitar este peligro, y sólo cuando lo he considerado necesario para evitar una ambigüedad en castellano he colocado palabras entre corchetes. La versión latina se transcribe exactamente de la edición de Eneströn (que sigue al manuscrito), en cambio en la traducción he interpretado la puntuación de manera que resulte más comprensible en castellano. Las interlíneas del manuscrito que se respetan en la tipografía de la edición, se colocan entre barras.

---

[63] Art. cit. p. 57. A propósito de la proposición I-1 del *De numeris datis* de Jordano muestra que el término latino *datus*, repetido tres veces en dicha proposición, ha sido traducido al inglés con tres palabras *given* (dado), *known* (conocido) y *found* (encontrado), es decir, que ha variado semánticamente en cada uso, lo que de ninguna manera correponde al original. Precisamente se trata de discutir ante todo el sentido exacto del *datus* original, sin interferencias de interpretaciones subrepticiamente introducidas en la traducción.

Deinceps ad minucias procedat negocium et eia (!). Cum minor quantitas /ut .3./ secundum aliquem numerum multiplicata maiorem perficit dicitur quantitas minor /ut .3./ maioris /ut .12./ pars mulutiplicativa sive pars quota sive pars simpliciter nomine restricto. Numerus autem secundum quem minor quantitas /ut .3./ multiplicata maiorem componit est denominacio partis ad totum. Est igitur numerus denominans /ut .4./ in quo quia quater tociens est unitas quociens pars /ut .3./ denominata in toto. Minucia sive fractio est quantitas numerata et denominata /ut .3./. Est autem tum pars ut una quinta tum partes ut tres quarte. Est autem quandoque toti equalis ut tres tercie; quandoque minor ut tres quarte, quandoque maior ut quinque tercie. Numerus numerans /ut .3./ est in quo tociens est unitas quociens pars in minucia.

Minucia per minuciam multiplicare est invenire per operacionem numerum et denominacionem quantitatis ita se habentis ad alterma producencium sicut reliqua se habet ad integrum.

Dividere minuciam per minuciam est invenire per operacionem numerum et denominacionem quantitatis cuius proporcio ad integrum sit sicut divise fractionis ad dividentem.

Quadrata minucia est quam et numerat et denominat quadratus vel sic. Quadrata est minucia quam aliqua minucia in se semel multiplicata producit. Cum autem hoc fit producens est radius producte.

Cubica est minucia qui ex cubicis numeris numeratur et denominatur sive quam aliqua minucia bis in se ducta producit. Quod cum sit producens producte radix dicitur.

Cum divisum fuerit quodlibet totum in .60. minuta et quodlibet minutum in .60. secunda et sic deinceps secunda in tercia et ita in infinitum minucie sic sumpte dicuntur philosophice. Talibus enim maxime utuntur philosophi.

Alie autem vulgares dicuntur. Differunt autem vulgares a philosophicis in modo scribendi. Scribuntur enim vulgares ita ut numerus numerans ponatur supra et numerus denominans subtus; ut tres quarte ita scribo $\frac{3}{4}$. In minuciis autem philosophicis numquam scribitur numerus denominans eo quod certum sit eas denominari a .60. est eciam opus distinctione locorum in earum figuracione. Primus enim locus est integrorum, secundus minutorum, tertius secundorum, quartus terciorum, et sic deinceps.

1. Que est proporcio numeri numerantis ad denominantem, eadem est minucie ad integrum.

Sit data minucia $\frac{3}{4}$ dico quod est proporcio ternarii ad quaternarium ea est trium quartarum ad integrum. Que enim est unitatis ad unitatem ea est unius quarte ad unam quartam per conversam prime partis prime quinti libri Euclidis sed per .15. .5. multiplicium et submultiplicium est proporcio una; ergo quae est ternarii ad unitatem ea est trium quartarum ad unam quartam, et que est unitatis ad quaternarium ea est unius quarte ad integrum iuxta descripcionem numeri denominantis; ergo ex quinto libro Euclidis que est proporcio ternarii ad quaternarium ea est trium quartarum ad integrum, quod fuit probandum.

2. Si fuerint due minucie eiusdem denominacionis proporio minucie ad minuciam erit sicut numeri numerantis ad numerum numerantem.

Ut si date minucie sint .*ac.* et .*bc.* habentes .*c.* communem denominacionem. Dico quod est proporcio .*a.* numeri numerantis ad .*b.* numerantem ea est .*ac.* minucie ad .*bc.* minuciam. Nam que est .*a.* ad .*c.* ea est minucie .*ac.* ad integrum; ex proxima; et que est .*c.* ad .*b.* ea est integri ad minuciam .*bc.* iuxta eandem racione conversionis; ergo que est *.a.* ad *.b.* ea est *.ac.* minucie ad *.bc.* minuciam. Quod fuit probandum.

3. Si numerus numerans unius minucie ducatur in denominantem secunde minucie et numerans in denominantem prioris erit proporcio prioris minucie ad secundam sicut numeri producti ex numero numerante prioris minucie in denominantem secunde ad numerum ex alia multiplicacione productum.

Ut si detur *.ab.* et *.cd.* minucie ducatur *.a.* numerans unius in *.d.* denominantem alterius et fiat *.f.* Item *.c.* alterius numerans in *.b.* denominantem prioris et fiat *.g*. Dico quod proporcio minucie *.ab.* ad minuciam *.cd.* est sicut proporcio *.f.* ad *.g*.

Ducatur enim eciam *.b.* in *.d.* et producatur *.h*. Inde sic ex *.a.* in *.d.* fit *.f.* et *.b.* in *.d.* fit *.h*. Ergo ex .15. quinti Euclidis que dicit eandem esse proporcionem multiplicium et submultiplicium proporcio *.a.* ad *.b.* est ut proporcio *.f.* ad *.h.*; ergo ex prima huius proporcio minucie *.ab.* ad integrum est sicut proporcio *.f.* ad *.h*. Item ex *.d.* in *.b.* fit *.h.* ex *.c.* in *.b.* fit *.g.*; ergo que est *.d.* ad *.c.* ea est *.h.* ad *.g.*; ergo que est *.h.* ad *.g.* ea est integri ad minuciam *.cd.*; ergo que est *.f.* ad *.g.* ea est *.ab.* minucie ad minuciam *.cd*. Quod erat probandum.

4. Unius integri ad duas gractiones proporcio est sicut numeri producti ex denominacionibus fractionum altera in alteram multiplicatis ad duos numeros quorum alter producitur numero numerante unius minucie in denominantem alterius ducto; reliquus ex multiplicacione reliqui denominantis in reliquum numerantem.

Maneat priori posicio. Dico quod proporcio integri ad minucies *.ab.* et *.cd.* est sicut proporcio *.h.* ad *.f.* et *.g.* ex proxima enim que est *.f.* ad *.g.* ea est *.ab.* ad *.cd*; ergo coniunctim que est *.f.* et *.g.* ea est *.ab.* et *.cd.* ad *.cd.*; sed que est *.g.* ad *.h.* ea est minucie *.ac.* ad integrum. Hoc patet inspicienti proxime probacionem; ergo que est *.f.* et *.g.* ad *.h.* ea est *.ab.* et *.cd.* minuciarum ad integrum; ergo e converso que est *.h.* ad *.f.* et *.g.* ea est integri ad *.ab.* et *.cd.* fractiones; quod proposui demonstrare.

5. Cum duas fractiones numerat unus et idem numerus proporcio prioris ad secundam est sicut proporcio numeri denominantis secundam ad eum qui prioris est denominacio.

Numeret *.a.* numerus *.ab.* et *.ac.* minucias. Dico quod que est proporcio *.c.* ad *.b.* ea est *.ab.* ad *.ac*. Multiplicatur enim *.a.* in *.c.* et faciat *.f.* Item *.a.* in *.b.* et fiat *.g*; ergo ex .16. quinti Euclidis que est proporcio *.c.* ad *.b.* ea est *.f.* ad *.g*; sed que est *.f.* ad *.g.* ea est minucie *.ab.* ad minuciam *.ac.* ex tercia huius; ergo que est *.c.* ad *.b.* ea est *.ab.* ad *.ac*; et hoc est propositum.

6. Datis duabus minuciis que est proporcio numerantis priorem ad eum qui numerat secundam ea est denominantis priorem ad eum a quo denominatur secunda minucie sunt equales et convertitur.

Ut si proporcio *.a.* ad *.c.* est sicut proporcio *.b.* ad *.d.* minuciam *.ab.* dico equalem esse minucie *.cd*. Nam permutatim erit proporcio *.a.* ad *.d.* sicut proporcio *.c.* ad *.d.* ergo ex prima huius ea est proporcio minucia *.ab.* ad integrum que est minucie *.cd.* ad idem; ergo ex .10. quinti Euclidis date minucie sunt equales; conversa ita patet; quia si equales sint minucie *.ab.* et *.cd.* tunc earum proporcio ad integrum eadem est; oportet ergo iuxta primam huius ut que est proporcio *.a.* ad *.c.* ea sit *.b.* ad *.c.* ea sit *.b.* ad *.d.* quod volui probare.

7. **Duas dissimilium denominacionum fractiones ad totidem minucias similium denominacionum reducere.**

Sint date due minucie *.ab.* et *.cd*. Ducam ergo *.a.* numerum numerantem unius in *.d.* denominantem alterius et producat *.f.* Item *.c.* in *.b.* et fiat *.g*. preterea *.b.* in *.d.* et producatur *.h*. Dico quod minucia *.fh.* est equalis minucie *.ab.* et quod minucia *.gh.* est equalis minucie *.cd*.

Quia enim ducitur *.a.* in *.d.* et fit *.f.* itemque *.b.* in *.d.* et fit *.h.* oportet ut proprocio *.a.* ad *.b.* sit ut proporcio *.f.* ad *.h.* Ergo permutatim que est *.a.* ad *.f.* ea est *.b.* ad *.h*; ergo ex proxima minucie sunt equales. Eodem modo proba quod equales sunt minucie *.cd.* et *.gh.* et ita reduxeris datas minucias duas in duas alias quarum utramque denominat *h* numeros. Et hoc intendi facere.

8. Integra quotcumque in date denominacionis minucias reduces cum numerum integrorum in numerum date minucie denominantem duces.

Si datur unum integrum fac numerum datum ad faciendam denominacionem fac inquam eum et numerantem et denominantem feceris totum quod ex prima huius videri potest.

Si autem dantur plura integra sit datus denominacionis numerus *.d.* numerus integrorum sit *.a*. Duc ergo *.a.* in *.d.* et fit *.c*; dico quod minucia *.cd.* equalis est datis integris. Quia enim ex *.a.* in *.d.* fit *.c.* necesse est ut proporcio *.c.* ad *.d.* sicut *.a.* numeri integrorum ad unitatem; sed que est *.a.* ad unitatem ea est integrorum datorum ad unum integrum; ergo que est *.c.* ad *.d.* ea est datorum integrorum ad unum integrum; sed que est *.c.* ad *.d.* ea est minucie *.cd.* ad unum integrum ex prima huius ergo ex .10. quinti Euclidis datis integris equalibus est minucia *.cd.*; et hoc fuit ostendendum.

9. Qualiter in addicione minuciarum vulgarium operandum sit ostendere.

Si minucia minucie debet addi reduc eas ad minucias unius denominacionis per proximam proxime ubi sint unius tunc adde numerum numerantem numero numeranti et fac ex duabus unam minuciam cuius numerus sit numerus compositus ex duobus numerantibus et denominans sit communis duarum minuciarum denominacio et feceris totum cum nichil aliud sit addere minuciam minucie quam invenire duabus datis equalem.

Quod autem hoc fiat modo qui dictus est patere potest ex secunda huius scilicet adiuvante penultima quinti. Si autem una duabus addenda est reduc duas in unius denominacionis minucias et compone eas in unum ut iam ostensum est. Deinde huic ex duabus aggregate adde terciam. Ad hunc modum facile est quotlibet minucias ad alias quotlibet aggiungere.

Quod si minucias addere vis integris vel integra vel minucias integris vel minuciis fac minucias unius denominacionis; deinde in minucias eiusdem denominacionis reduc integra; et postea facile fiet quod faciendum est. Et hinc patet quid faciendunm sit in addicione vulgarium minuciarum.

10. Opus addicionis in philosophicis minuciis demonstrare.

Scribe utramque quantitatem eam scilicet cui facienda sit addicio scribe superius ita ut primus locus versus sinistram sit integrorum, proximus minutorum, tercium secundorun, et sic deinceps. Scribe ergo sub ordine superiori quantitatem addendam sive sint tantum minucie sive integra cum minuciis; pones autem integra sub integris, minuta sub minutis, secunda sub secundis, et sic de aliis. Hoc facto incipe ab utralibet parte et adde numerum inferiorum super se posito in sua scilicet differencia et quicquid provenerit in loco integrorum scribe illud in loco eorum deleto eo quod prius ibi erat. In aliis autem locis utpote in loco minutorum vel secundorum et cet. sic facies si ex addicione inferioris ad superiorem provenerit minus .60. pones id pro superiori eo deleto. Si autem .60. delebis quidem quod erant superius sed nichil scribes ibi nisi ciframi proxime autem loco ante versus dextram dabis unitatem quia .60. sexagesime faciunt unum integrum in loco precedente. In huismodi autem addicione inferioris ad superiorem si est supra aliquam summam nichil ponam eam supra se. Racio et exemplum patent.

11. Datis minuciis sive vulgaribus sive philosophicis qualiter quedam ab aliis subtreahende sint exponere.

De vulgaribus primo loquar. Aut ergo date minucie sunt unius denominacionis, aut si non sunt fiant. Deinde subtrahatur numerus numerans a numerante et perfectum erit negocium; quod probari potest per secundam huius considerato quid sit unum ab alio subtrahere.

Si autem dantur minucie philosophice scribatur supra illa que non est minor; et altera subtus ita scilicet ut sint integra sub integris, minuta sub minutis, et cet. Deinde subtrahe numerum integrorum si ibi mavis incipere a numero integrorum; et si quid remanet scribe in loco superiori. Similiter fac in aliis locis et totum feceris. Si vero non potes in aliqua differencia subtrahere numerum inferiorem a numero superposito si hoc est in loco integrorum frustra laboras. Minus est enim quod supra est. Si vero est alibi subtrahe unitatem in ordine superiori a loco proximo versus integra et valebit ipsa .60. in loco unde debes facere subtractionem. A numero ergo unde trahere debes et non potes et a .60. adiectis sub trahe quod debes et scribe residuum pro superiori et totum feceris. Racio patet et exemplum non est opus poni.

12. Duplacionem et deduplacionem in minuciis tam vulgaribus quam philosophicis edocere.

Minuciam vulgarem duplasti duplato eius numerante ut patet per secundam huius; vel deduplato eius denominante si par est numerus ut patet ex quinta huius. Quatuor enim tercie ad quatuor sextas duple sunt. Item minuciam vulgarem deduplasti duplato eius denominante ut patet per quintam huius. Nam due quarte dimidium sunt duarum medietatum. Aut deduplato numerante si par est. Quod si impar subtracta unitate deduplabis residuum immo duplabis ut dixi denominantem et nullus sit error ex omissione residui.

In minuciis vero philosophicis numero integrorum duplato scribes in loco eorum quicquid provenerit in aliis locis si excreverit minus quam .60. scribes illud. Si .60. scribes in loco numeri duplati cifram et unitatem dabis proximo loco versus integra. Si plus quam .60. scribes in loco duplati quantum excessum et pro .60. dabis unitatem proximo loco versus integra. In deduplacione vero si alicubi digitus impar occurrit si ipse est primus sui loci versus dextram scilicet subtracta unitate dimidietur reliquum et pro dimidio unitatis dentur .30. proximo loco versus sinistram qui locus recedit ab integris. Si autem in ulteriori differencia unius loci digitus impar occurrit subtracta unitate dimidietur residuum et pro unitate dentur .5. digito precedentis figure. Ut si deduplare velis .75. minuta de .5. dimidia .4. et da in locum secundorum .30.; deinde subtracta unitate de .7. dimidia .6. et da dimidio quaternarii quinque et ad hunc modum fac in aliis. Racio nulli dubia est.

13. Qualiter in vulgaribus minuciis multiplicandum sit expedire.

Corolarium. Eritque patens quod minucia numerata a numero producto ex numerante unius numeri in numerantem alterius numeri et denominata ab eo qui producitur ex denominante ducto in denominantem sic se habet ad alteram minuciarum sicut reliqua ad integrum.

Multiplicabitur minucia per minuciam si ducatur numerans in numerantem et denominans in denominantem tunc enim processerit minucia habens numerante eum numerum qui procedit ex numerante in numerantem ducto et denominantem eum numerum qui producitur ex ductu denominacionis in denominacionem.

Verbi gracia sint due minucie *.ac.* et *.df.*; ducatur *.a.* numerans in *.d.* numerantem et fiat *.b*; ducatur *.c.* denominans in *.f.* denominantem et fiat *.h.* Dico ex *.ac.* in *.df.* produci minuciam *.bh*. Ducatur autem *.b.* numerans minucie *.bh.* in *.f.* denominantem minucie *.df.* et procedat *.g*. Item *.d.* numerans minucie *.df.* in *.h.* denominantem minucie *.bh.* et fiat *.k*; ergo ex tercia huius proporcio *.bh.* minucie ad minuciam *.df.* est sicut proporcio numeri *.g.* ad *.k.* numerum. Item *.a.* ducitur in *.d.* et provenit *.b.* et *.h.* ducitur in *.d.* et procedit *.k.*; ergo que est *.a.* ad *.h.* ea est *.b.* ad *.k.* quia eadem est proporcio producencium et productorum; ergo permutatim que est *.a.* ad *.b.* ea est *.h.* ad *.k.* Item *.b.* in *.f.* et fit *.g.* *.c.* in *.f.* et fit *.h.* Ergo que est *.b.* ad *.c.* ea est *.g* ad *.h.* Sit ergo *.a.* primum *.b.* secundum *.c.* tercium. Sit iterum *.g.* primum *.h.* secundum *.k.* tercium. Vides ergo quod proporcio *.a.* primi ad *.b.* secundum in uno ordine est sicut *.h.* secundum ad *.k.* tercium in alio ordine et que est *.b.* secundi ad *.c.* tercium ea est .g. primi ad *.h.* secundum; ergo ex antepenultuma quinti Euclidis proporcio *.a.* ad *.c.* est sicut proporcio *.g.* ad *.k*; ergo proporcio minucie *.bh.* ad minuciam *.df.* est sicut proporcio *.a.* ad *.c*; ergo ex prima huius proporcio minucie *.bh.* ad minuciam *.df.* est sicut proporcio minucie *.ac.* ad integrum; ergo ex descripcione eius quod est minuciam multiplicari in minuciam apparet propositum.

Si autem plures minucie per plures multiplicande sunt reducantur tan iste ad unam denominacionem quam ille ad unam et aggregantur tam multiplicate in unam quam alie in unam et cum ex omnibus duas feceris fac ut modo ostensum est. Quod si integra dantur cum minuciis reduc integra ad minucias et fac ut scis si premissa scis. Nichil igitur restat quod in multiplicacione vulgarium doceri amplius oporteat. Nota tamen quod minucia per minuciam non est vulgariter multiplicanda nisi utraque sumatur respectu eiusdem integri id est nisi utraque numeretur et denominetur respectu eiusdem integri. Quod si dantur minucie diversorum integrorum fac de uno integro minuciam reliqui; tunc ergo habes minuciam integri iam factam et minuciam huius minucie. Qualiter minucia minucie numeretur et denominetur respectu primi integri docet proposicio que sequitur.

14. Pars partis est pars tocius numerata a numero qui fit ex ductu numerantis in numerantem et denominata a numero qui producitur ex denominante in denominantem multiplicato.

Verbi gratia: qualitatem quandam respectu integri numeret *.a.* et denominet *.b.* Sit alia quantitas quem numeret *.a.* et denominet *.b.* Sit alia quantitas quem numeret *.c.* et denominet *.d.* repectu *.ab.* minucie. Sit autem primum integrum *.z.* Multiplicetur *.a.* in *.c.* et fiat *.f.* Ducatur *.b.* in .d. et procedat *.g.* Dico quod quantitatem *.cd.* numerat *.f.* et denominat *.g.* respectu *.z.* integri. Si enim non *.cd.*

sumatur quantitas maior vel minor que sic numeretur et sic denominetur respectu *.z.* itegri; et sit ipsa quantitas *.q.* Ducam igitur eciam *.a.* in *.d.* et fiat *.h.* Ex posicione igitur et prima huius patet quod proporcio minucie *.ab.* ad *.z.* integrum est sicut proporcio *.a.* numeri ad *.b.* numerum. Similiter proporcio *.cd.* minucie ad minuciam *.ab.* que est suum integrum est sicut proporcio *.c.* numeri ad *.d.* numerum; sed *.c.* se habet ad *.d.* sicut *.f.* ad *.h.* quia ex *.c.* in *.a.* fit *.f.* ex *.d.* in *.a.* fit *.h.*; ergo que est *.cd.* minucie ad quantitatem *.ab.* ea est *.f.* numeri ad *.h.* numerum. Item ex *.a.* in *.d.* fit *.h.* ex *.b.* in *.d.* fit *.g*; ergo que est *.a.* ad *.b.* ea est *.h.* ad *.g*; ergo eciam que est *.ab.* minucie ad *.z.* integrum ea est *.h.* ad *.g*; ergo que est *.f.* ad *.g.* eadem est *.cd.* quantitatis ad *.z.* integrum; sed positum est quod *.q.* quantitatem numerent et denominent *.f.* et *.g.* repectu *.z.* integri; ergo ex prima huius que est *.f.* ad *.g.* eadem est *.q.* quantitatis ad *.z.* integrum; sed eadem est *.cd.* quantitatis ad *.z.* integrum; ergo *.q.* quantitas equalis est *.cd.* quantitati; non ergo minor vel maior. Oportet igitur ut *.cd.* minuciam minucie *.ab.* numeret *.f.* et denominet *.g.* respectu *.z.* integri; quod fuit demonstrandum.

15. Si numerus numerans philosophice minucie multiplicetur in se et de producto fiat numerans minucie philosophice tantum distantis a priore quantum eadem prior ab integris necesse est minuciam integris propiorem inter ulteriorem et integrum medio loco esse proporcionalem.

Verbi gracia sumatur ad libitum data minucia in terciis et sit eius numerans *.a.* quo in se multiplicato fiat *.c.* Numeret hic numerus aliquam minuciam philosophicam in sextis. Locus enim sextorum tantum recedit a terciis quantum terciorum locus ab integris. Dico ergo quod que est proporcio *.c.* sextorum ad *.a.* terciorum eadem est *.a.* terciorum ad integrum. Inveniam enim proximam denominacionem a terciorum quem habent respectu primorum integrorum. De hiis enim sermo est. Sit autem hec denominacio *.b.* sed sicut denominantur tercia respectu integrorum ita eciam sexta respectu terciorum propter equalem distanciam; ergo per proximam multiplicatur *.b.* in *.b.* et procedet denominacio sextorum ad integra sit illa *.d.* ergo sexta sunt minucia *.cd.* patet autem ex operacione multiplicacionis in vulgaribus minuciis quod ex minucia .*ab*. producta est per multiplicacionem minucia .*cd*. ergo que est proporcio .*cd*. minucie ad minuciam .*ab*. ea est minucie .*ab.* ad integrum. Ex hoc patet propositum. Vel sic: .*a*. numerus radix est .*c*. quadrati similiter .*b*. numerus .*d*. quadrati; ergo ex .11. 8[1] Euclides proporcio .*c*. ad .*d*. est proporcio .*a*. ad .*b*. duplicata sed que est .*c*. ad .*d.* ea est .*cd*. minucie ad primum integrum; et que est .*a.* ad .*b*. ea est .*ab*. minucie ad integrum; ex prima huius ergo proporcio minucie .*cd*. ad integrum est proporcio .ab. minucie ad idem duplicata; ergo que est .*cd*. ad .*ab*. eadem est .*ab*. ad integrum. Ex hoc licet inferre proposito tuo (!)....tegra (!). Infer ex hoc quod propositus.

16. Datis duabus minuciis philosophicis si numerans alterius in numerantem relique ducatur procedit numerus numerans minucie philosophice tantum distantis ab una datorum quantum reliqua ab integris et habentis se in proporcione ad alteram datorum sicut reliqua ad integrum sive sint eiusdem loci sive diversorum date minucie; nichil differt quantum ad denominacionem.

Sin autem exempli gracia date minucie .*b*. tercia et .*a*. quarta; ex ductu .*a*. in .*b*. fiat .*c*. Dico quod proporcio .*c*. septimorum ad .a. quartorum est sicut .*b*. terciorum ad integrum. Sit enim .*d*. denominacio terciorum ad integrum; sit eciam .*f.* denominacio quartorum ad integrum; patet autem quod ita denominantur septima respectu quartorum ut tercia respectu integrorum propter eandem distanciam; est igitur .*d*. denominacio septimorum respectu quartorum; ergo ex multiplicacione .*f*. in .*d.* procedit denominacio ad integra per proximam proxime; sit illa numerus .*g.* ergo .*c*. septima sunt .*cg*. minucia; sed ex ductu .*bd*. in .*af*. procedit minucia .*cg*. ut patet ex operacione multiplicacionis vulgarium; et que est proporcio .cg. minucie ad minuciam .*af*. ea est eciam .*bd*. minucie ad integrum.

17. Qualiter in multiplicacione philosophicarum minuciarum faciendum sit notificare sit propositum.

Ponatur in uno ordine summa multiplicanda et summa multiplicans subtus ita ut primus id est integrorum locus inferioris ordinis sit sub ultimo superioris. Deinde per numerantem ultime inferioris multiplica numerantem ultime superioris, et quod procedit si est minus .60. pone in loco supra locum minucie multiplicantis. Si vero .60. relinque illam locum vacuum et unitatem pone in loco proximo versus integra. Si est plus quam .60. substrae .60. quociens potes et residuum si quid est pone supra minuciam multiplicem. Quociens autem substraxisti .60. tot unitates id est numerum tot unitatum pone in proximo loco versus integra. Eodem modo fac in aliis.

Sed nota quod si dantur integra cum minuciis cum ad minuta venitur antequam de illis aliud fiat reduci debent integra in minuta et addi minutiis prius habitis; vel pocius fiat hoc in principio operacionis. Cum ergo per minuta id est minucias loco integrorum proximas multiplicaveris minuta loco integrorum superposita invenies nichil in loco integrorum. Multiplica ergo per nichil eandem superpositam minuciam et procedet nichil. Hoc scribe in loco superposito deleto eo quod prius ibi erat. Deinde transfer locum integrorum inferioris ordinis sub minucia proxima versus integra et loca sequencia continua et operare ut modo sed hec que cederet ex multiplicacione numerancium in numerantes addes hiis que invenies in locis ubi ipsa poni debent si qua processerunt ex priori multiplicacione que ibi sunt posita. Ita ergo facies donec ponantur integra sub integris et tunc facta operacione erit integrum. Sed cave ne aliquem locum vel in superiori vel inferiori ordine omittas.

Si enim velis multiplicare minuta et secunda per quarta et quinta inferius ponenda non debes omittere in ordine superiori locum integrorum quamvis integra non sint ponenda; nec in ordine inferiori omittenda sunt loca terciorum, secundorum, minutorum, et integrorum. Sed quamvis vacare debeant signanda sunt tamen. Sicut enim in operacione integrorum non debet omitti cifra ita nec hic loca ne omissis locis precedentibus minucie ponatur in locis non suis.

Racio huius operaciones. Velim per *.a.* quarta et *.b.* minuta multiplicare *.f.* quarta et *.g.* tercia et *.h.* minuta et integra. Ponam ergo locum integrorum ordinis sub *.f.* et scribam scribenda hinc inde nullo loco omisso qui ante *.a.* vel ante *.f.* esse debeat. Deinde multiplicabo numerantem *.a.* in *.f.* numerantem et procedat *.c.* numerus; ponam eam super *.a.* sic enim tantum distabit *.c.* ab *.f.* quantum *.f.* ab integris. Apparet ergo per proximam vel ei proximam quod minucia philosophica quam in tali loco numerat *.c.* procedat ex ductu minucie philosophice quam in suo loco numerat *.a.* in minuciam philosophicam quam in suo loco numerat *.f.* Quod si loca vacua intermiscerem et posuissem *.a.* iuxta *.b.* et *.g.* iuxta *.h.* et *.f.* continuo continget *.c.* octava scribi in sextorum loco. Cum autem ex multiplicacione numerantis in numerantem producitur plus quam .60. non scribo totum numerantem in loco sue minucie sed de .60. facio unum integrum; et ideo quociens possum subtrahere .60. tot unitatum numerum scribo in proximo loco versus intregra. Hinc totum patet.

Commodius autem fit hec operacio si tam summa multiplicans quam summa que multiplicanda est congregetur in unum locum et deinde ducatur numerans in numerantem et quod procedit numeret minuciam philosophicam tantum distantem ab altera summarum quantum reliqua ab integris. Ut si velis multiplicare integra et minuta et secunda et tercia fac iuxta octavam huius de integris minuta, de minutis secunda, et ex illis tercia. Si autem summa multiplicans sit integra et minuta et quarta reduc eciam hanc summam ad quarta et tunc multiplica per quarta, tercia vel e contrario ducendo numerantem in numerantem et numerum qui procedet pone in locum tantum distantem ab altera summarum quantum reliqua ab integris utpote in loco septimorum. Si autem vis scire de septimis exeuntibus quantum faciant divide numerantem per .60. et quod exibit erit numerus sextorum. Quo numero diviso iterum per .60. exibit numerus quintorum; et ad hunc modum fac quousque divisio non possit fieri per .60. et scias quantum sit in summa procedente ex multiplicacione. Racio patet.

18. Quomodo minucia vulgaris per aliam dividenda sit manifestum facere. Erit autem patens quod quantitas

numerata a numero exeunte in divisione numerancium et denominata a numero qui exit in divisione denominancium ita se habet ad integrum sicut divisa minucia ad dividentem.

Facta una minucia de summa per quam facienda est divisio. Itemque una ex illa summa que debet dividi divide si potest numerantem dividende per numerantem alterius et signa numerum exeuntem. Divide eciam denominantem per denominantem sufficienter si potes et feceris totum; tunc enim exivit quantitas numerata a numero exeunte in divisione numerancium et denominata a numero qui exit in divisione denominancium. Ipsa enim sic se habet ad integrum sicut divisa fractio ad dividentem.

Verbi gracia sit .*cd*. minucia dividenda per minuciam .*ab*. et possint dividi sufficenter .*c*. per .*a*. et exeat .*f*. Itemque .*d*. per .*b*. et exeat .*g*. Dico minuciam .*fg*. sic se habere ad integrum sicut minucia .*cd*. ad minuciam .*ab*. Quia enim .*c*. numero diviso per .*a*. exit .*f*. et .*d*. numero diviso per .*b*. exit .*g*. oportet ut ex ductu .*f*. in .*a*. fiat .*c*. et .*g*. multiplicato in .*b*. fiat .*d*. ergo ex ductu minucie .*fg*. in minuciam .*ab*. fit minucia .*cd*. ergo ex corelario .13. proporcio minucie .*cd*. ad minuciam .*ab*. est sicut proporcio minucie .*fg*. ad integrum; ergo minucia .*fg*. exit ex divisione minucie .*cd*. per minuciam .*ab*. Ex descripciones divisionis habes ergo propositum.

Et nota quod omnis minucia per quamlibet aliam divisibilis est sufficienter sed non semper in propositis numeris. Sepe enim numerus per numerum dividi non potest sufficienter quia aliquid habundat sepe non potest quia dividendum est minor. Tunc ergo reducende sunt minucie ad tales numeros in quibus possit fieri divisio. Ut autem facere hoc scias sequentem considera.

19. Datas minucias sic numerare et denominare ut numeri dividente minucie per numeros alterius sine superfluitate dividantur. Apparebit autem minuciam que exit in divisione unius minucie per alteram numerari a numero quem producit numerans dividende ductus in denominantem relique et denominare a numero qui fit denominacione dividende in numerantem alterius multiplicato.

Sint date minucie .*ab*. et .*cd*. nec possim dividere .*c*. per .*a*. nec .*d*. per .*b*. Ducam ergo numeros minucie que dividere debet in se: hoc est .*a*. in .*b*. et fiat .*f*. Deinde ducam .*f*. tam in .*c*. et procedat .*g*. quam in .*d*. et fiat .*h*. Dico quod minucia .*gh*. est minucia .*cd*. et quod .*g*. sufficienter dividitur per numerum .*a*. ita ut exeat numerus qui fit ex ductu .*c*. in .*b*. sit autem ille .*k*. et quod .*h*. numerus sufficenter dividitur per .*b*. numerum exeunte numero quem producit .*d*. in .*a*. multiplicatus; hunc vero vocemus .*m*.

Quia enim ex .*a*. in .*b*. fit .*f*. oportet ut .*a*. sit pars .f. denominata a numero .*b*. Similiter .*f*. est pars .*g*. denominata a .*c*. ergo ex .13. .*a*. est pars .*g*. denominata a numero .*k*. ergo ex ductu .*a*. in .*k*. fit .*g*. ergo .*g*. sufficienter dividitur per .*a*. et exit .*k*. Simili modo proba quod .*h*. dividitur sufficienter per .*b*. et exit numerus .*m*. ergo ex divisione minucie .*cd*. sive .*gh*. per minuciam .*ab*. exit minucia .*km*. Hinc patet propositum.

Quocienscumque ergo dividenda est minucia una per alteram duc numerantem dividende in denominantem alterius et numerus qui producitur fac numerantem. Duc eciam denominantem dividende in numerantem reliquo et quod procedit fac denominantem et habebis minuciam exeuntem. Ut si per .*ab*. minuciam velis dividere minuciam .*cd*. duc .*c*. in .*b*. et fiat .*k*. duc eciam .*d*. in .a. et procedat .*m*. necesse est minuciam .*km*. exire in divisione .*cd*. minucie per minuciam .ab. Ipsa enim sic se habet ad integrum sicut minucia .*ab*. ad .*cd*. quod ex tercia et prima huius promptum est videri: et hoc est quod sciri voluimus.

20. Datis duabus minuciis si una per alteram sufficienter dividitur in numeris propositis ita se habet divisa ad dividentem sicut exiens numerancium ad exeuntem denominancium Secunda pars Et si inequales sunt date minucie superfluitas earum est minucia tocius denominata a denominacione divisa et numerata a numero qui fit numerante divisore multiplicato per differenciam duorum exeuncium.

Sint date minucie .*cd*. dividenda et .*ab*. divisiva. Dividatur .*c*. per .*a*. et exeat .*f*. dividatur .*d*. per .*b*. et exeat .*g*. et nichil hinc inde supersit. Non est opus ut probatur quod minucia *.cd*. ad minuciam *.ab*. se habet sicut minucia *.fg*. ad integrum; hoc enim patet. Constat igitur per primam huius quod ita se habet *.cd*. ad *.ab*. sicut numerus *.f*. ad numerum *.g*. Sint autem inequales date minucie; ergo inequales sunt numeri *.f*. et *.g*. et si maior est *.f*. maior est minucia *.cd*. si ille minor et minucia *.cd*. Ponamus ergo *.h*. esse differenciam numerorum *.f*. et *.g*. ergo minucia *.hg*. est differencia minucie *.fg*. et integri; ergo *.hg*. minucia sumpta respectu minucie *.ab*. est differencia minuciarum *.cd*. et *.ab*. Sed ex posiciones et .13. huius patet quod *.hg*. minucia minucie *.ab*. numeratur respectu integri per numerum qui fit ex ductu *.h*. in *.a*. et denominatur a numero qui fit ex ductu *.g*. in *.b*. Sed ex *.g*. in *.b*. fit *.d*. quia diviso *.d*. per *.b*. exit *.g*. Habes ergo propositum. Erat autem propositum differencia minuciarum *.ab*. et *.cd*. esse minuciam tocius denominatam a numero *.d*. et numeratam a numero qui fit ex ductu *.h*. in *.a*. et hoc habes. Habes igitur quod habere debes.

21. Si vero totus consumitur denominans et non totus numerans tunc si exeuntes sunt equales minucia divisa superat alteram parte integri; denominata a denominacione divisa et numerata a superfluo divisiones numerancium. *Secunda pars* Quod si minor est exiens numerancium minucia devidens excedit divisam parte tocius denominata a denominaciones divisa et numerata a numero qui est differencia numeri in divisione relicta et numeri quem producit exeuncium differencia in numerantem minucie dividentis multiplicata. *Pars 3*. Si vero maior est exiens numerancium excessus divise super alteram est minucia tocius quam denominat divisa denominacio et numerat congregatus ex addicione numeri in divisione superflui ad eum qui fit differencia exeuncium in numerantem minucie dividentis multiplicata.

Consumat *.b*. dividendo totum *.d*. et exeat *.g*. Diviso autem *.c*. per *.a*. exeat *.f*. equalis numero *.g*. et relinquatur in divisione numerus *.h.* Dico quod minucia *.cd*. excedit minuciam .ab. parte integri quam denominat *.d*. et numerat *.h*. hoc est minucia *.hd*.

Si enim *.a.* non consumpsit dividendo totum *.c.* consumpserit partem numeri *.c.* que sit numerus *.z*; ergo minucia *.zd.* dividitur sufficienter per minuciam *.ab.* et exit *.fg.* ergo minucia *.zd.* et minucia *.ab.* equales ex prima parte precedentis sed minucia *.cd.* excedit minuciam *.zd.* minucia tocius que est *.hd.* quia *.c.* numerans vincit *.z.* numerantem numero *.h*; ergo eciam minucia *.cd.* vincit minuciam *.ab.* minucia *.hd.* quod prima pars secunde partis proposuit.

Item sit *.f.* minor *.g.* numero; differencia eorum sit *.k.* numerus. Quo in *.a.* multiplicato fiat *.q.* differencia *.q.* et *.k.* sit *.t.* Dico quod minucia *.ab.* maior est et excedit divisam minucia *.cd.* in minucia *.td.* respectu tocius sumpta. Ad hoc sic. Numero *.c.* diviso per *.a.* consumptus est *.s.* et remansit *.h.* et exivit *.f.* minor numero *.g*; ergo minucia *.zd.* minor est quam minucia *.ab.* et exceditur ab ea fractione *.qd.* ex secunda parte prime partis presentis; ergo *.zd.* et *.qd.* minucie valent minuciam *.ab.* Item *.h.* numerus minor est *.a.* numero quia *.c.* diviso per *.a.* remansit *.h*; ergo *.q.* numerus quem multiplicacionem producit *.a.* in *.k.* maior est *.h.* numero; ergo minucia *.hd.* minor est fractione *.qd*; ergo maior est minucia *.ab.* quam minucia *.cd.* quia minucia *.cd.* valet minuciis *.zd.* et *.hd.* minores minuciis *.zd.* et *qd.* quas valet minucia *.ab.* Sed minucia *.qd.* excedit minuciam *.hd.* minucia *.td*; ergo addita communiter *.zd.* minucie *.zd.* et *qd.* valentes minuciam *.ab.* addunt *.td.* minuciam super minucias *.zd.* et *.hd.* que valent minuciam *.cd.* Ex hoc habetur secunda pars huius secunde partis.

Item sint *.f.* maior numero *.g.* Dico quod minucia *.cd.* addit super minuciam *.ab.* minuciam quamd enominat *.d.* et numerat compositus ex numeris *.q.* et *.h.* Ad hoc sic. Maior est *.f.* numero *.g.* ergo maior est minucia *.zd.* fractione .ab. et addit super eam minuciam *.qd.* ex secunda parte prime partis presentis propositionis; ergo minucie *.ab.* et *.qd.* valent minucian *.zd.* sed minucie *.zd.* et *.hd.* valent minuciam *.cd.* ergo minucia *.cd.* valet tres minucias scilicet *.ab.* et *.qb.* et *.hd.* Ex hoc patet quod proponit pars tercia huius .19°. (!)

Si autem vis scire de duabus minuciis quarum unus denominans denominantem; alterius non totum consumit dividendo sive numerans numerantem dividat sufficienter sive non si inquam de talibus minuciis scire vis quid una super alteram addit commodissime hoc scias quantum ad presens artificium reducendo minucias ad eandem denominacionem tunc enim sive numerans numerantem sufficienter dividat sive non invenies quod queris per aliquam parcium presentis proposicionis.

22. Integra integris minucialiter dividere.

Utilitas huius operacionis hec est ut scias per eam quanta proporcio datorum integrorum inter aliquas res equaliter dividendorum contingat unamquamque illarum rerum quibus dividi debet. Sit ergo numerus integrorum dividendorum numerus .*b*; sit item divisor id est numerus numerans res quibus facienda est divisio numeros .*a*. Aut ergo equales sunt hii numeri et tunc nichil est opus operacione. Aut unus minor altero. Sit primo minor .*b.* dividendorum numerus faciam ergo minuciam alicuius dividendorum quam numeret .*b*. et denominet .*a.* divisor. Dico igitur quod in hac operacione exit .*ba*. minucia alicuis datorum integrorum si sint data integra unius maneriei et eiusdem valoris et quantitatis. De talibus enim agitur. Hec enim ita se habent ad integrum sicut .*b*. dividendus numerus ad .*a.* divisorem ex prima huius; et dico quod si .*b*. integra dividas singula in aprtes sic numeratas et sic denominatas tot habebit tantas partes equales quot sunt unitates in divisore qui est numerus .*a.*

Si enim velim reducere .*b*. integra ad minuciam quarum denominacio sit .*a*. ducam .*a.* in .*b.* et numerus procedens qui sit .*c*. erit numerus numerans minucie denominate ab .*a.* et equantis sicut dicet probacio .8°. huius; ergo minucia .*ca*. valet .*b.* integra. Sed .*b*. ducitur in .*a*. et fit .*c*. ergo quociens est unitas in .*a*. tociens est .*b.* in .c; ergo eciam ex huius secunda tociens est minucia .*ba*. in minucia .*ca*. que valet data integra. Ex hoc habes propositum cum minor est numerus dividendorum.

Si vero maior est numerus dividendorum id est numerus *.b.* numero *.a.* tunc si *.a.* dividit sufficienter *.b.* patet quod quamlibet unitatem *.a.* divisoris tot integra contingere quot sunt unitatem in numero exeunte. Si vero aliquid remanet in divisione sit numerus remanens *.d.* et numerus exiens *.f.* faciam ergo minuciam alicuius datorum integrorum quam numeret *.d.* et denominet *.a.* dico quod quamlibet unitatem divisoris contingunt *.f.* integra et *.da.* minucia unius integri. Sit enim pars numeri *.b.* tota consumpta per divisionem *.a.* numeri fit inquam *.g.* numerus ergo ex *.g.* et *.d.* numeris constat numerus *.b.* Diviso autem *.g.* per *.a.* exit *.f.* ergo de *.g.* integris contingunt quamlibet unitatem divisoris *.f.* integra. Hoc enim patet. Si autem *.d.* integra dividas per *.a.* contingit quamlibet unitatem divisoris minucia *.da.* sicut patet ex principio presentis probacionis. Ex hiis iam scis quotcumque datos panes quotlibet pauperibus exequor dividere. Habes igitur communem scienciam operandi in divisione vulgarium minuciarum.

Sed hoc attende quod sepe noticia rei que queritur in huiusmodi operacione tam in multiplicando quam dividendo impeditur propterea quod habitudo minucie ad minuciam non cognoscitur vel ideo quia multus est numerus denominans et similiter numerans numerus; vel quia minucia habet denominacionem quam vulgus non attendit ut si dicas: 4[or] octave denarii non cognoscit vulgus minuciam quia non solet denarius in octavas incidere. Utile est igitur maiorem denominacionem cum fieri potest tum in minorem vertere tum in datam commutare. Quod qualiter et quando fieri possit due sequentes docebunt.

23. Subtiliores id est *maioris denominacionis* minucias in grossiores reducere.

Quando denominacio maior tanto minucia minor et ita subtilior. Data igitur minucia multi numerantis et multe denominacionis ostendam utrum possit minoribus numerari et denominari; et si potest quomodo inveniendi sint illi numeri. Sit igitur data minucia *.ab.* si numeri *.a.* et *.b.* sunt contra se primi data minucia non numeratur et denominatur a minoribus. Si enim fieri potest denominet eam [Fig. 19] *.d.* numerus minor *.b.* numero et numeret eam .*c*. numerus minor .*a*. numero; ergo minucia .*ab*. est minucia .*cd*; ergo mediante prima huius que est proporcio .*a*. ad .*b*. ea est .*c*. ad .*d*. ergo .*a*. et .*b*. non sunt in sua proporcione minimi; sed ipsa sunt ad invicem primi ut positum est; ergo ex .22. . 7^{1}. Euclidis sunt in sua proporcione minimi; contrarium autem prius intuli.

Si autem dati numeri sint communicantes tunc fieri potest quod debet. Scies autem per primam .7^{i}. Euclidis utrum .*a*. et .*b*. sint primi ad invicem. Quod si non primi ad invicem sunt communicantes. Invenies ergo per secundam .7^{i}. maximum ambos numerantes. Est autem ille maximus numerans ambos qui in huismodi divisione qualem prima .7^{i}. iubet fieri primus consumit totum quod dividit; sit autem ille numerus .*c*. Divide ergo .*a*. per .*c*. et exeat .*d*. Deinde .*b*. per .*c*. et exeat .*f*. Dico quod minucia .*ab*. est minucia .*df*. quia que est proporcio .*a*. ad .*b*. ea est .*d*. ad .*f*. ergo iuxta sextam huius minucia sunt equales; patet autem quod .*d*. minor est .*a*. et quod .*f*. minor est quam numerus .*b*. Habes ergo propositum sic cum haberi potest. Item cum numeri minucie sunt contra se primi fac quod potes si quid potes divide numerantem si potes in plures numeros quorum uterque vel quilibet sit communicans denominacioni; ut si partes numeri .*a*. sint .*t*. et .*x*. et .*z*. communicantes numero .*b*. reducere poteris minucias .*tb*. et .*xb*. et *zb*. valentes minucias .*ab*. quamlibet in grossiorem denominacionem.

24. Datam minuciam a dato numero denominare cum fieri potest.

Non enim hoc semper fieri potest sed tunc tantum cum et datum numerum aliquis numerus sic se habet sicut numerus numerans datam minuciam ad suam denominacionem. Sit ergo data minucia .*ab*. datus numerus .*d*. Si vis scire utrum aliquis numerus sic se habet ad .*d*. ut .*a*. ad .*b*. et quis si aliquis duc .*a*. in .*d*. et excrescat .*h*. divide .*h*. per .*b*. et si totus .*h*. consumitur numerus exiens qui sit .*c*. se habet ad .*d*. ut .*a*. ad .*b*. Tunc enim ex .*c*. in .*b*. fiet .*h*. Sit ergo .*a*. primum .*b*. secundum .*c*. tercium .*d*. quartum. Intende sic. Quod fit ex primo in quartum equum est eo quod ex secundo in tercium; ergo ex .19. .7[i] proporcio *.a.* ad *.b.* est sicut *.c.* ad *.d.* invento ergo numero sic se habente ad *.d.* datam denominacionem sicut *.a.* ad *.b.* sit ille *.c.* fiat ergo hic numerus numerans; et dico quod minucia *.ab.* est minucia *.cd.* Inferes enim hoc ex sexta huius constantibus premissis.

Si autem numerus *.h.* non totus consummitur per numerum *.b.* dividendo impossibile est *.ab.* minuciam reduci ad denominacionem *.d.* numeri; fiat enim si potest et sit *.ab.* minucia equalis vel eadem *.kd.* minucie; ergo que est *.a.* ad *.b.* ea est *.k.* ad *.d*; ergo qui numerus ex *.a.* in *.d.* fit eciam ex *.k.* in *.b*; ergo ex sufficienti divisione *.h.* per *.b.* exit *.k.* Dictum est autem *.h.* per *.b.* totum consumi non posse. Habes ergo propositum si haberi potest.

25. Si vero numero numerante datam minuciam ducto in datam denominacionem numerus procedens maior quid est quam denominacio date minucie equalis est duabus habentibus datam denominacionem si una earum denominetur respectu primi integri et numeretur a numero exeunte in divisione; reliqua numeretur a numero in divisione superfluo et denominetur respectu partis prime integri denominate a numero qui datam minuciam denominat.

Verbi gratia sit data minucia *.ab.* data denominacio sit *.d.* Ducam *.a.* in *.d.* et fiat *.h.* numerus maior numero *.b.* Dividam ergo *.h.* per *.b.* et exeat *.c.* et remaneat *.z.* Dico ergo quod minucia *.ab.* valet minuciam *.cd.* respectu eiusdem integri sumptam respectu cuius sumitur *.ab.* et minuciam *.zd.* respectu unius *.b.* sumptam.

Multiplicem enim *.a.* in *.b.* et fiat *.k.* ergo *.kb.* minucia et *.hd.* minucia sunt equales; quia que est proporcio *.h.* ad *.d.* ea est *.k.* ad *.b*; sed si *.b.* integris dividerem *.hd.* minucias secundum modum operandi qui ostenditur in .20[a]. presentis cuilibet unitati *.b.* numeri caderet *.cd.* et *.zd.* unius *.b.* quia *.h.* diviso per *.b.* exit *.c.* et remanet *.z.* Si vero *.kb.* minucia secundum eundem modum dividerem *.b.* integris cuilibet unitati *.b.* caderent *.ab.* quia *.k.* per *.b.* exit *.a*; ergo sic se habent *.cd.* et *.zd.* unius *.b.* ad *.hd.* sicut *.ab.*

ad .*kb*. sic igitur reducta est iterum data minucia denominacionem quodammodo; et ad hoc tetendit intencio.

26. Si autem ex multiplicacione productus est minor denominacione date fractionis data minucia equalis est minucie numerate a numero per multiplicacionem producto et a numero denominante datam minuciam denominate respectu unius partis quam data denominacio respectu unius integri denominat.

Verbi gracia: data minucia sit .*ab*. data denominacio sit .*d*. ex .*a*. in .*d*. fiat .*z*. numerus minor .*b*. numero. Dico quod minucia .*ab*. unius integri valet .*zb*. unius .*d*. Ducatur enim .*d*. eciam in .*b*. et procedat .*q*; ergo ex .13. huius .*zb*. unius .*d*. est .*zq*. minucia unius integri; sed .*d*. ducitur in .*a*. et fit .*z*. Item .*d*. in .*b*. et fit .*q*. ergo que est proporcio .*a*. ad .*z*. ea est .*b*. ad .*q*.; ergo ex sexta huius equales sunt .*ab*. et .*zq*. minucie cum sint sumpte respectu eiusdem integri. Ex hoc patet quod minucia .*ab*. unius integri est equalis .*zb*. minucie unius .*d*. et ita scis quo adjecto possit .*ab*. fieri unum .*d*. ut ita ad datam denominacionem (!).

27. Modum philosophiae dividendi pertractare.

Commodissime sic facies et certissime totam summam dividendam reduce ad minucias ultimi generis datarum minuciarum et similiter summam divisuram. Verbi gracia: si dividere debeas aliquot integra et minuta et secunda et tercia reduc per .8^{am}. huius integra ad minuta multiplicando per .60. Deinde minutorum numerum multiplica per .60. et feceris ex minutis secunda; sic eciam fac ex secundis et terciis. Similiter operare in summa divisura reducendo eas ad extremas suarum minuciarum ut si per integra et secunda debeas dividere fac ex tota summa secunda. Hoc facto numerantem dividende minucie divide per numerantem minucie divisoris; et sit primo quod totum eum consumat. Accipe ergo numerum exeuntem et numera per eum minuciam philosophicam tantum distante ab integris quantum divisa a dividente. Ipsa enim exis in hac operacione.

Verbi gracia: velim per *.a.* minuta dividere *.c.* quarta. Dividam ergo *.c.* numerantem per *.a.* numerantem et exeat *.b.* et nichil sit superfluum. Et quia quarta distant a minutis per duo loca interne dia dico quod in divisione exeunt *.b.* tercia. Illa enim distant ab integris per duo loca interposita. Si enim multiplicarem *.a.* minuta per *.b.* procederent .c. sicut patet ex operacione multiplicacionis; ergo que est proporcio *.c.* quartorum ad *.a.* minuta eadem est *.b.* terciorum ad integrum; ergo ex divisione *.c.* quartorum per *.a.* minuta exeunt *.b.* tercia; quod volui probare. Sed nota quod sic operandum est quando minucia dividens propinquior est integris quam minucia divisa. Nam quomodo operandum in divisione minucie loco integrorum propioris per remocionem postea dicetur.

Si autem in divisione huiusmodi quam nunc dixi superfluit aliquid post hic autem contingit quando diviso numerante minucie dividende per numerantem relique relinquitur aliquid. Tunc ergo multiplicando per .60. numerantem minucie dividende reduc ipsam ad tam remotas fractiones utpote ad octava vel nona vel si opus est diligenti operacione adhuc alterius ut videlicet numerans dividende tam multus fiat ut possit dividi per numerantem minucie divisoris sufficienter. Si vero tunc aliquid remanet non curetur propter minucie exiguitatem. Insensibilem enim, facit errorem omisso paucorum decimorum vel aliquorum citra vel ultra semper autem quod exit in operacione locandum est ubi dixi.

Si autem minucia dividenda propinquior est integris quam minucia divisor transfer eam hoc est dividendam multiplicando per .60. eius numerantem donec distet quantum vis ab integris et sit minucia divisor inter eam et integra propinquior integris. Exemplum patet et racio est in evidenti.

28. Si fuerint minucie ab integro continue proporcionales tercia ab integro quadrata erit et deinceps quelibet sequens una intermissa. Itemque quarta ab integro cubica erit et quelibet sequens duabus intermissis.

Sit ut que est proporcio integri ad *.a.* minuciam ea sit *.a.* minucie ad *.b.* minuciam et huius ad *.c.* minuciam. Dico quod tam

.*b*. tercia ab integro quam .*d*. quinta ab ipso quadrata est. Ducatur in se .*a*. minucia et producatur .*f*. minucia; ergo .*f*. est quadrata et opotet ut proporcio integri ad .*a*. sit ut proporcio .*a*. ad .*f*; ergo .*f*. est .*b*. et ita .*b*. est minucia quadrata. Item que est proporcio integri ad .*a*. ea est .*b*. ad .*c*. et que est .*a*. ad .*b*. ea est .*c*. ad .*d*.; ergo que est integri ad .*b*. ea est .*b*. ad .*d*. Ex hoc sequitur ut modo quod minucia .*d*. quadrata sit habens radicem .*b*. minuciam; et sic habemus primam propositi partem. Item dico quod minucia .*c*. quarta ab integro cubica est; et si minucie .*d*. adiunxero in proporcionalitate continua minucias .*g*. et .*h*. dicam .*h*. minuciam cubicam esse. Quod est enim proporcio .*c*. ad .*b*. ea est .*a*. ad integrum; ergo ex ductu .*a*. in .*b*. fit .*c*; ergo ex ductu .*a*. radicis in suam quadratam minuciam .*b*. fit .c. ergo .*c*. cubica est; hoc est enim aliquid in se bis duci in se et in productum; patet eciam quod numeri .*c*. minucie cubici sunt quia eos producunt numeri .*a*. minucie in se et in productos in numeros videlicet .*b*. minucie multiplicati. Item que est integri ad .*b*. eadem est .*d*. ad .*h*. hoc enim patet; ergo ex ductu .*b*. in .*d*. fit .*h*. sed .*b*. est radix minucie .*d*. ergo ut iam dixi oportet .*h*. minuciam cubicam esse. Ex hoc habes utramque propositi partem.

29. Datam minuciam quadrare aut quod fieri hoc non potest ostendere. Itemque datam minuciam ad cubicos numeros reducere vel quod possibile non sit hoc fieri demonstrare.

Quadrare minuciam est assignare ei numeros quadratos a quibus numeretur et denominetur. Sit autem data minucia .*cd*. Utrum ergo possit quadrari sic vide. Multiplica numerantem per denominantem et vide de producto utrum sit quadratus querendo eius radicem. Si enim est quadratus eius radix est medio loco proporcionalis inter numeros producentes quia si numerus quem primus et tercius in se ducti producunt fit ex secundo in se multiplicato oportet ipsam secundum inter primum et tercium esse medio loco proporcionalem. Si ergo inter numerantem et denominantem cecidit aliquis numerus medio loco proporcionalis dico illam minuciam quadrari posse.

Verbi gracia: data minucia est *.cd*. sit autem inter *.c*. et *.d*. medio loco; proporcionalis numerus *.f.* faciam ergo minuciam quam numeret *.f*. et denominet *.d*. denominacio minucie *.cd*. ergo ex secunda huius que est proporcio *.c*. ad *.f*. ea est minucie *.cd*. ad minuciam *.fd*. et tunc que est *.f*. ad *.d*. ea est minucie *.fd*. ad integrum ex prima huius; ergo minucia *.fd*. radix est minucie *.cd*. Ducam ergo *.f*. in se et fiat *.h*. Item *.d*. in se et procedat *.x*; ergo minucia *.hx*. ita se habet ad minuciam *.fd*. sicut se habet *.fd*. ad integrum; ergo *.cd*. est *.hz*. quod eciam sic videre potest *.f.* numerus est medio loco proprocionalis inter *.c*. et *.d*; ergo ex *.c*. in *.d*. fit quadratus *.f.* numeri; ergo procedit *.h*. Item ex *.d.* in se fit *.x.* numerus ergo que est *.c*. ad *.d*. ea est *.h*. ad *.x*; ergo minucia *.cd*. est minucia *.hx*. ex sexta huius; sed *.h*. et *.x*. sunt numeri quadrati; ergo quadrata est minucia *.cd*. Vel sic commodius inveniri per .33^{am}. .7[1]. tres numeros minimos in proporcionalitate *.c*. et *.f.* et *.d*. sint ipsi *.h*. *.z*. et *.q*. ergo ex corelario secunde .8^{i}. per quam hoc est inveniendum *.h*. et *.q*. sunt quadrati; sed eorum proporcio est sicut *.c*. et *.d*. ergo minucia *.cd*. quadratus in numeris *.h*. et *.q*.

Si vero inter numerantem et denominantem date minucie nullus cadit numerus medio loco proporcionalis dico datam minuciam quadrari non posse. Sit enim ut inter .c. et .d. nullus sit medius in proporcione et dicatur quadrari posse minucia *.cd*. quadretur ergo et sit *.h*. numerus quadratus eam numerans; denominet vero eam *.z.* numerus similiter quadratus; patet autem, ex corelario secundo noni Euclidis quod *.h*. tetragonus in *.z*. quadratum multiplicatus producit quadratum; ergo radix producti est medio loco proporcionalis inter *.h*. et *.z*. sed minucia *.hz*. est minucia *.cd*; ergo iuxta conversam sexte huius quam facile est videre oportet ut proporcio *.h*. ad *.z*. sit ut *.c*. ad *.d*. ergo quia inter *.h*. et *.z*. cadit numerus medio loco proporcionalis necesse est propter secundam .8^{i}. Euclidis ut eciam inter *.c.* et *.d*. intercadat numerus aliquis medio loco proporcionalis; at iam erat positum contrarium.

Alia probacio: sit inter *.c*. et *.d*. medio loco proporcionalis *.f.* Aut ergo *.c*. *f*. et *.d*. sunt in sua proporcionalitate minimi aut non. Si sunt minimi ergo *.c*. et *.d*. sunt quadrati ex corelario secunde .8^{i}.

Si non per eandem secundam tres minimos illius proporcionalitatis numeros et erunt extremi quadrati et habent proporcionem *.c.* et *.d.* ergo ipsi numerant et denominant minuciam *.cd.* et ita quadrata est data minucia. Si vero inter *.c.* et *.d.* nullus est numerus medius im proporcione non potest quadrari data minucia.

Item si vis ad formam cubicam reducere datam minuciam vide primo utrum hoc fieri possit tali artificio. Vide utrum inter numerantem et denominantem date minucia sint duo numeri in proporcionalitate continua id (!) quociens tali artificio vide que sit proporcio numerantis ad denominantem et per .33[am]. .7[i] Euclidis inveni minimos eiusdem proporcionis numeros. Quibus inventis vide utrum alter ipsorum non sit cubicus; an uterque sit cubicus. Quod si alter non est cubicus constat inter datos numeros non inveniri duos numeros continue proporcionales. Sit enim data minucia *.ad.* et sint numeri *.f.* et *.g.* minimi secundum proprocionem numerorum *.a.* et *.d.* Si ergo *.f.* et *.g.* non sunt ambo cubici non sunt inter eos duo numeri continue proporcionalitatis. Hoc enim dicit corelarium secunde .8[i]. Euclidis. Si vero *.f.* et *.g.* sunt ambo cubici necesse est ut iam dicam inter eos esse duos numeros continue proporcionales; ergo ex octava .8[i]. Euclidis eciam inter *.a.* et *.d.* cadunt totidem numeri in continua proporcionalitate.

Si autem vis scire qui numeri cadant inter *.a.* et *.d.* vide primo qui numeri cadant inter *.f.* et *.g.* cubicos. Hos autem sic invenies. Sit cubi *.f.* quadratus *.z.* numerus et radix amborum numeros *.t.* sit eciam cubi *.g.* quadratus numerus *.q.* et radix amborum *.s.* numerus. Multiplicetur *.s.* in *.z.* et fiat *.h.* ducatur quoque *.t.* in *.q.* et procedat *.x.* Dico quod proporcio *.f.* ad *.h.* est sicut *.h.* ad *.x.* et *.x.* ad *.g.*

Probacio: ex ductu *.t.* in *.z.* fit *.f.* et ex ductu *.s.* in *.z.* fit *.h.* ergo que est *.t.* ad *.s.* ea est *.f.* ad *.h.* Item ex ductu *.t.* in *.q.* fit *.x.* ex ductu *.s.* in *.q.* fit *.g*; ergo que est *.t.* ad *.s.* ea est *.x.* ad *.g*; ergo que est *.f.* ad *.h.* ea est *.x.* ad *.g.* Quod autem eadem sit proporcio *.h.* ad *.x.* ita probo. Ex ductu *.z.* in *.t.* fit *.f.* ex ductu *.q.* in *.t.* fit *.x.* ergo que est *.z.* ad *.q.* ea est *.f.* ad *.x.* sed proporcio *.z.* ad *.q.* cum sint ambo quadrati est sicut proporcio *.t.* ad *.s.* duplicata; sunt enim radices *.t.* et *.s.* ergo proporcio *.f.* ad *.x.* est sicut proporcio *.t.* ad *.s.* duplicata; ergo eciam proporcio *.f.* ad *.x.* est sicut proporcio *.f.* ad *.h.* duplicata; ergo proporcio *.f.* ad *.h.* est sicut proporcio *.h.* ad *.x.* Hiis habitis si vis habere numeros cadentes inter *.a.* et *.d.* fac ut dicam; oportet propter .30^{am}. .7^{i}. Euclidis ut quia *.f.* et *.g.* minimi sunt in sua proporcione et in eadem sunt *.a.* et *.d.* oportet inquam ut *.f.* numeret *.a.* et *.g.* numeret *.d.* secundum unum et eundem numerum; sit ipsa *.k.* Multiplicetur *.k.* in *.h.* et fiat *.b.* itemque in *.x.* et fiat *.c.* quia ergo multiplicium et submultiplicium una est proporcio oportet ut que est *.f.* ad *.h.* ea sit *.a.* ad *.b.* et que est *.h.* ad *.x.* ea *.b.* ad *.c.* et que es *.x.* ad *.g.* ea *.c.* ad *.d.* Habes ergo hoc; sed eo fortasse non multum indiges.

Ut igitur ad propositum veniam si vis ad cubicos numeros reducere minuciam datam vide secundum artificium quod prima .7^{i}. ponit utrum *.a.* et *.d.* sint contra se primi. Si enim sunt ad invicem, primi sunt eciam in sua proporcione minime ex .33. .7^{i}. tunc si uterque est cubus habes propositum. Si alter laboras in vanum ut post patebit.

Si autem *.a.* et .d. non sunt in sua proporcione minimi inventis minimis vide utrum uterque sit cubicus et tunc fac unum numerantem et alterum denominantem et datam minuciam feceris cubicam quod patet ex .6. huius. Si autem alter non est cubicus nichil proficis. Non est enim cubica *.ad.* minucia nec potest ad cubicos numeros reduci; si autem potest reducatur et numeret eam *.h.* et denominet *.q.* ambo cubici ergo que est *.h.* ad *.q.* ea est *.a.* ad *.d.* sed inter *.h.* et *.q.* sunt duo numeri in continua proporcionalitate quia sunt ambo cubici; ergo eciam inter *.a.* et *.d.* ergo inventis minimis huius proporcionalitatis numeris erunt extremi cubici. Iam autem positum est huic contrarium.

Habes igitur totum huius propositi negocium cujus summa hec est. Si in iter numerantem et denominantem date minucie cadit aliquis numerus medio loco proporcionalis minucia quadratur in primo et tercio numerorum in illa proporcionalitate minimorum. Si nullus minucia nec est quadrata nec potest quadrari. Item si inter numerantem et denominantem cadunt duo numeri in proporcionalitate continua minucia cubicatur in primo et quarto numerorum illius proporcionalitatis minimorum. Si non duo minucia nec est cubica nec potest cubicari. Que ex premissis manifesta sunt. Hoc est igitur quod intendimus.

30. Si minucia philosophica imparis loci numeratur a quadrato numero ipsa est quadrata. Quod si minucia quarti loci vel cuiuslibet sequentis deinceps; duobus semper locis intermissis numerantem habet cubicum cubica est procreatis enim per multiplicationem vulgaribus denominacionibus ex philosophica necesse est in locis imparibus quadratas in quartis denominaciones cubicas inveniri.

Sit imparis loci minucia philosophica quam denominet .*a*. numerus quadratus. Dico eam esse quadratam. Invenatur enim radix .*a*. numeri et sit .*b*. ponam ergo .*b*. ut numeret minuciam intermedii loci inter locum .*a*. et integra; cum ex ductu .*b*. in se fiat .*a*. oportet propter .14^{am}. huius ut minucia philosophica quam numerat .*b*. sit medio loco proporcionalis inter minuciam philosophicam quam numerat .*a*. et integrum; ergo ex ductu minucie philosophice quam numerat .*b*. in se ipsam fit minucia philosophica quam numerat .*a*; ergo minucia philosophica quam numerat .*a*. quadrata est; quod eciam sic videbis. Sit .*c*. philosophica denominacio igitur .*bc*. denominatur a numero .*c*. philosophice respectu unius proximarum minuciarum antepositarum. Multiplica igitur .*c*. denominacionem philosophicam tum in se tum in productum quamdiu opus est donec secundum .13^{am}. huius procedat vulgaris denominacio .*bc*. minucie; sit autem illa .*z*. numerus. Sed propter equalem locorum distanciam necesse est ut numerus .*z*. qui .*bc*. denominat respectu integri denominet eciam .*ac*. minuciam philosophicam respectu unius minucie denominate a numero .*z*. respectu primi integri; ergo per .13. huius numerus .*z*. in se multiplicatus semel producit denominacionem; sed .*bz*. in se ductus producit numerantem .*ac*. philosophice minucie respectu integri; sit vero denominacio producta .*x*. Vides ergo quod minucia philosophica .*ac*. que est minucia vulgaris .*ax*. quadrata est; et vides eciam quod denominacio vulgaris videlicet *.x.* in loco occurrens est quadrata. Patet ergo una pars propositi.

Item ut modo sit denominacio philosophica *.c.* numerus et numeret minucias philosophicas quarti loci *.f.* numerus cubicus. Item septimi loci qui est quartus a quarto minucias philosophicas numeret *.g.* cubus similiter. Itemque decimi loci qui est quartus a septimo quasdam minucias philosophicas numeret *.h.* cubus; dico minucias *.fc.* et *.gc.* et *.hc.* cubicas esse. Sumatur enim unis *.c.* de tercio loco constat quod respectu unius secundi denominat *.c.* numerus minuciam philosophicam *.fc.* sed et unum secundum respectu unius minuti et unum minutum respectu unius primi integri denominat *.c.* numerus ergo ex .13. huius unum secundum unius integri primi denominat numerus factus ex *.c.* in se multiplicato; sit ille *.q.* Minuciam igitur philosophicam *.fc.* denominat *.c.* et numerat *.f.* respectu unius *.q.* ergo *.q.* et *.c.* multiplicatis uno in alterum et procedente numero *.z.* denominabit *.z.* numerus *.fc.* minuciam respectu integri ex .13. huius; sed *.q.* numerus est quadratus *.c.* radicis; ergo *.z.* est cubicus; ergo verum est quod in quarto loco cubici occurrit denominacio et quod *.fc.* minucia philosophica que est *.fz.* minucia vulgaris cubica est; probo eciam quod *.gc.* minucia philosophica in .7°. loco cubica est; quia propter equalem distancia ita denominatur *.gc.* respectu unius *.z.* sicut unum *.z.* respectu integri; ergo denominacio *.gc.* minucie respectu unius *.z.* est numerus *.z*; ergo ex .13. huius *.z.* numerus in se multiplicatus producit denominacionem *.gz.* minucie respectu integri; sit illa *.t.* numerus. Ex ductu autem unitatis unum *.z.* numerantis in *.g.* fit *.g.* ergo ex .13. huius *.gz.* minuciam unius *.z.* de quarto loco numerat *.g.* cubicus et denominat *.t.* respectu integri. Est vero *.t.* cubicus quia *.z.* cubus in se multiplicatus producit eum. Cubum enim ductus producit cubum rex quarta noni Euclidis. In .7°. igitur loco invenies quod promisi; ostendam iterum quod in decimo loco habetur denominacio vulgaris cubica et quod minucia philosophica *.hc.* illius loci cubica est cum sit *.h.* numerans cubicus. Denominatur enim *.hc.* minucia respectu unius *.t.* sicut unum *.t.* respectu unius *.z.* in quarto loco positi. Est igitur hec denominacio *.z.* numerus. Ducatur igitur unitas unum *.t.* respectu integri numerans in *.h.* et remanebit *.h.* Ducatur eciam *.t.*

in *.z.* et procedat *.k.* ergo ex .13. huius *.hz.* unius *.t.* est *.hk.* unius integri. Est autem *.k.* numerus cubicus ex tercia noni quia fit ex ductu *.t.* cubici in *.z.* cubicum. Habes itaque totum propositum. Nam secundum aliquem istorum modorum probabitur propositum quecumque fiat non falsa posicio.

31. Datam minuciam sive ad quadratam sive ad cubicam malueris denominacionem reducere.

Sit data minucia *.ab.* cui velim primo invenire quadratam denominacionem. Ducam igitur *.b.* denominacionem in se et fiat numerus *.d.* Ducam quoque *.a.* in *.b.* et procedat *.c.* numerus. Dico ergo quod minucia *.ab.* est *.c.* habens *.d.* quadratam denominacionem. Ducatur enim *.a.* in *.b.* et fit *.c.* itemque *.b.* in *.b.* et fit *.d*; ergo que est *.a.* ad *.b.* eadem est *.c.* ad *.d*; ergo ex sexta huius minucia *.ab.* est minucia *.cd.* Habes igitur unam promissi partem.

Ut autem ad cubicam denominacionem reducas datam minuciam sit *.ab.* data minucia. Ducatur igitur denominacio *.b.* in se et fiant *.d.* deinde ducatur *.a.* in *.d.* et fiat *.t*; itemque *.b.* in *.d.* et procedat *.z.* igitur que est proporcio *.a.* et *.b.* ductorum pariter in *.d.* numerum ea est *.t.* ad *.z.* qui numeri ex multiplicacione producuntur; et ita minucia *.ab.* est minucia *.tz.* Est autem numerus *.z.* cubicus quia fit ex ductu *.b.* radicis in *.d.* suum quadratum. Habes ergo totum quod proposui.

32. Radicem minucie vulgaris extrahere.

Sit data minucia *.ab.* primum ergo vide per artificium .30. huius utrum quadrabilis sit; primum agam de radios quadrate minucie et si est quadrabilis; et inveni radicem numerantis et similiter denominantis et fac minuciam radicem. Si non est quadrabilis ergo nec est quadrata. Non potest igitur habere radicem veram sed facies ut fit in numeris; invenies scilicet radicem cuiusdam quadrate minucie minoris data minucia cui adiecto eo quod in operacione residuum erit recrescet data minucia.

Verbi gracia: date minucie *.ab.* si non habet quadratam denominacionem fac denominacionem quadratam per proximam. Habeat autem ne moves pro nichilo. Accipe igitur radicem *.b.* quadrati et fit *.d.* deinde radicem *.a.* numerantis accipe quantum potest propinquius et si ipsa numerus *.c.* remaneat vero de numero *.a.* in operacione *.z.* numerus. Item ducatur *.c.* in se et fiat *.t.* numerus; ducatur eciam *.d.* in se et fit *.b.* Dico ergo quod *.cd.* est radix minucie *.tb.* Hoc enim patet; et quod minuciam *.tb.* excedit minucia data *.ab.* fractione *.zb.* que in operacione superfuit. Cum enim quererem radicem *.a.* numeri inveni *.c.* et superfuit *.z.* sed ex ductu *.c.* se fit *.t*; ergo *.t.* et *.z.* valent *.a.* numerum; sed que est *.t.* et *.z.* ad *.a.* eadem est proporcio *.tb.* et *.zb.* minuciarum ad *.ab.* ex secunda huius. Ergo habes ex hoc quod proposui.

Et nota quod si nec *.a.* nec *.b.* esset quadratus et velles in hiis numeris querere radicem quanto propinquius posses peccares. Non enim contingeret ut inventa radice et ea in se multiplicata non inquam contingeret ut minucia proveniens quadrata et minucia in operacione residua id est illa quam numerat residuum numerantis et denominat residuum denominantes equaret datam minuciam. Verbi gracia: dentur $\frac{6}{8}$ in quibus operando inveniam radicem duas medietates et de numerante consumentur .4. et remanebunt duo. Item de nominante consumentur similiter .4. et remanebunt .4. superfluunt ergo in operacione aut $\frac{2}{4}$ aut $\frac{2}{8}$. Cum autem in se multiplicavero $\frac{2}{2}$ radicem scilicet procedent $\frac{4}{4}$ que sunt $\frac{8}{8}$ quibus sive duas quartas sive duas octavas addideris fiet multo plus sex octavis. Propter hunc igitur errorem declinandum oportet datam minuciam si quadrari non potest ad quadratam denominacionem reduci ad minus.

Velim nunc querere radicem cubicam minucie vulgaris. Sit autem data minucia *.tz.* quod si ad cubicos numeros potest reduci quod docet videri proxima proxime fiat hoc et inventa utriusque cubi radice inventa erit radix data minucie. Si autem non potest detur tamen ea cubica denominacio nisi eam habeat. Quare autem hoc fieri commodum sit patet ex iam dictis. Sit autem et habeat et sit *.z.* numerus cubicus; radix eius sit *.f.* numerus. Queratur igitur radix *.t.* numeri quanto potest propinquius et sit *.x.* que in se cubice ducta consumat de *.t.* numero *.b.* numerum et relinquat *.c.* numerum. Dico quod radix *.xf.* in se cubice ducta producit *.bz.* minuciam; cum *.cz.* minucia equantem minuciam *.tz.* datam. Nam *.f.* in se cubice ductus producit *.z.* sed *.x.* producit *.b.* et relinquebatur in operacione numerus *.c.* Igitur minucia *.xf.* est radix *.bz.* minucie cubice. Sequitur quoque ex dictis ut *.c.* et *.b.* valeant *.t.* ergo eciam *.cz.* et *.bz.* valent minuciam *.tz.* Habes ergo quod radix inventa producit minuciam cubicam que eam residua hoc est cum *.cz.* minuciam perficit *.tz.* minuciam datam non habentem veram radicem in minuciis numeros habentibus. Vides igitur modum operandi in hoc negocio patetque operis racio. Ostensum est igitur quod intendi.

33. Philosophicarum minuciarum radicem investigare.

Sive dentur integra cum minuciis sive sole minucie reduc datam summam ad minucias unius generis. Semper autem reducantur ad locum imparem. Si queris quadrate minucie radicem ibi enim invenies quadratam denominacionem. Inveni ergo aut veram aut quanto verius potes radicem numerantis et ponam eam in medio inter minuciam et integrum principale; et minucia ibi sic numerata est radix quesita.

Verbi gracia. Reduxerim datam summam ad quarta que sunt in quinto loco et sit minucia ibi facta *.a.* Queram ergo radicem *.a.* numerantis sicut in numeris solet queri radix quadrati. Inveniam autem *.b.* radicem et sit primo numerus *.a.* totus consumptus. Ponam ergo numerum ut numeret secunda que tercio loco posita mediique locum tenent inter .4[a]. et integra. Dico modo quod *.b.* secunda sunt vera radix *.a.* quartorum.

Probacio: denominet *.z.* numerus secunda respectu integrorum ergo idem denominabit *.a.* quarta respectu secundorum; ergo *.z.* numerus in se multiplicatus producit denominacionem *.a.* quartorum respectu integrorum; ergo *.z.* numerus est radix denominacionis quadrate quam habet .a. quarta respectu integrorum sed .*b*. est radix .*a*. numerantis; ergo .*bz*. minucia est radix .*a*. quartorum quod est equipollens numero idem proposito. Sit modo ut .*b*. numerus sit non vera sed proxima radix .*a*. numerantis et consumat de .*a*. numerum .*q*. et relinquat .*s*. numerum. Dico quod .*b*. secunda sunt radix .*q*. quartorum. Hoc enim patet et superfuerunt in operacione .*s*. quarta que addita .*q*. quartis perficiunt .*a*. quarta. Nam et .*q*. et .*s*. valent .*a*. Hoc planum quia .*q*. quarta et .*s*. quarta valent .*a*. quarta; patens est igitur operacio in querendo radicem quadratam minucie philosophice.

Superest cubice minucie philosophice radicem extrahere. Cum igitur collegeris unam summam datam ad aliquem quartorum locorum; verbi gracia: ad quartum vel septimum vel decimum vel aliquem talium quere radicem cubicam numerantis; ubi autem ponenda sit radix inventa sic vide. Inter quemlibet quartorum locorum et integrorum locum duo loca sunt ita se habencia in posicione quod ab integrorum ad alterum illorum et ab eo ad reliquum et ab illo iterum ad datum quartum locum una et eadem est distancia. In eo igitur illorum duorum qui integris propior est pones radicem; et minucia ibi numerata a radice est vera radix date summe; si numerans cuius radix querebatur totus consumptus fuit. Si vero non totus radix illa radix est minucie cubice cui adiecta minucia quam numerat in dato quarto loco numerus in operacione superfluus perficitur data minucia.

Verbi gracia. Reduxerim datam summam ad locum septimum et sit ibi numerans .*b*. huius radix cubica sit .*c*. numeris et sit primo vera eius radix; ponam igitur .*c*. ut sit numerans secundorum in tercio loco. Dico ergo quod .*c*. secunda sunt radix cubica .*b*. sextorum quorum locus est septimus ab integris.

Probacio: ex ductu .*c*. in se fiat .*z*. ergo ex ductu .*c*. secundorum in se fiunt .*z*. quarta ex .14. huius; ergo .*z*. quarta sunt minucia quadrata; sed ex ductu .*c*. in .*z*. fit .*b*. quia enim .*b*. est cubus habens radicem .*c*. quam quadrat numerus .*z*. oportet ut .*b*. cubus fiat ductu .*c*. sue radicis in suum quadratum .*z*. ergo ex .15. huius ex ductu .*c*. secundorum in .*z*. quarta fiunt .*b*. sexta. Est igitur necesse ut *.b.* sexta sunt cubica minucia cum fiant ex ductu radicis in suum quadratum. Sunt enim *.c.* secunda radix *.z.* quartorum. Sit modo ut *.c.* non sit vera radix cubica numeri *.b.* sed in se cubice ductu consumat *.k.* et relinquat *.t.* Dico quod *.c.* secunda sunt radix cubica *.k.* sextorum. Hoc autem probetur prout modo processum est; et quod *.t.* sexta que in operacione superfuerunt cum *.k.* sextis faciunt *.b.* sexta; sed nec hoc dubium *.k.* enim numerus et *.t.* valent *.b.* numerum; ergo *.k.* sexta et *.t.* sexta faciunt .b. sexta. Habes itaque hanc operacionem cum sua racione.

34. Omnium duorum quadratorum proximorum maior supra minorem addit numerum qui ex amborum radicibus aggregatis componitur.

Sint *.a.* et *.b.* duo proximi quadrati; sitque *.z.* numerus radix *.a.* quadrata et *.x.* radix *.b.* quadrata ponam vero *.b.* maiorem. Dico quod *.b.* numerus valet *.a.* et *.z.* et *.x.* numeros; quia enim *.b.* est proximus quadratus maior quadrato *.a.* oportet ut *.x.* maioris radix sit unitate maior quam radix *.z.* Idem est ergo multiplicare *.x.* in se quod multiplicare *.z.* et unitatem in se et unitatem. Multiplicando autem *.z.* in se et unitatem procedit *.a.* cum *.z.* Multiplicata vero unitate in se et *.z.* procedit *.x.*; ergo multiplicando *.x.* in se procedunt *.a.* et *.z.* et *.x*; ergo hii numeri valent *.b.* quadratum. Patet igitur propositum.

35. Omnis cubus addit super proximum minorem cubum numerum congregatum ex quadratis amborum et numero facto ex ductu radicis unius in radicem alterius.

Verbi gracia: sint cubi duo proximi maior *.x.* et minor *.z.* radix maioris *.b.* radix minoris *.a*; patet ergo quod *.b.* numerus habet super *.a.* unitatem. Sit autem quadratus *.x.* cubi numeris *.c.* quadratus alterius numerus *.d.* Dico quod cubus *.x.* maior est *.z.* cubo numero qui colligitur ex *.c.* et *.d.* numero qui fit ex ductu *.a.* in *.b.* qui fit *.s.* Fit enim *.x.* ex *.a.* et unitate in *.c.* ductis sed ex uno in *.c.* fit *.c.* ex *.a.* in *.c.* fit cubus numeri *.a.* et quadratus eius *.d.* et *.s.* sicut probabo. Idem est enim ducere *.a.* in *.c.* et ducere *.b.* in *.a.*

et in productum ex .37. procedentis; ergo idem fit ex *.a.* in *.c.* quod ex *.b.* in *.s.* ergo eciam idem fit ex uno et *.a.* in *.s.* sed ex uno in *.s.* fit *.s.* Collige ergo et videbis quod ex *.b.* in *.c.* fit *.c.* et *.s.* et hoc quod fit ex ductu *.a.* in *.s.* sed ducendo *.a.* in *.s.* duco per equipollens *.a.* in *.b.* et in productum ergo duco *.a.* in *.a.* et in unitatem et in productum; sed ducendo *.a.* in unitatem et in productum produco *.d.* et ducendo *.a.* in *.a.* et in productum facio *.z.* cubum numeri *.a.* ergo ex *.b.* in *.c.* fiunt *.c.* et *.d.* et .s. et *.z.* Ex istis igitur constat *.x.* ergo addit super *.z.* cubum minorem *.c.* et *.d.* quadratos et *.s.* numerum factum ex ductu radicis unius in radicem alterius et hoc est quod fuit demonstrandum.

36. Si quadratus in non quadratum ducatur et addat non quadratus super maximum suum quadratum non minus radice ipsius producitur ex multiplicacione numerus non quadratus habes quadratum maiorem eo quadrato qui fit ex primo quadrato in maximum prioris non quadrati quadratum multiplicato /glosa instanciam habet hec priori pars in quaternario solo. Pars secunda./ **Si vero non quadratus addit super maximum suum quadratum minus radice ipsius tunc si quidam quadratus in non quadratum ducatur et deinde in productum; itemque in productum et huiusmodi multiplicaciones tociens fiant quociens excessus non quadrati super suum maximum quadratum continet radicem eius et adhuc semel necesse est ut ad minus in ultima multiplicacione producatur non quadratus; cuius maximus quadratus maior sit eo qui fit ex ductu primi quadrati in maximum quadratum non quadrati ex penultima multiplicacione produ**cti. /glosa. Quod ex ductu quadrati in quadratum fiat quadratus et ex ductu non quadrati vel e converso fiat non quadratus dicit corolarium secunde noni Euclidis./

Pars prior instanciam habet tantum in quaternario. In omnibus enim maioribus quadratis ad huiusmodi multiplicacionem assumptis necessarium est quod dicitur. Verbi gracia: sit *.a.* datus quadratus; sit *.b.* numerus non quadratus in quo maximus quadratus; sit *.c.* habens radicem *.z.* excedat autem numerus *.b.* numerum *.c.* numero *.t.* non minori quam est numerus *.z.* Dico quod ex ductu *.a.* in *.b.* fit non quadratus habens maximum quadratum maiorem eo qui fit ex *.a.* in *.c.* Fiat enim ex *.a.* in *.b.* numerus *.q.* itemque ex *.a.* in *.t.* numerus *.h.* ex *.a.* in *.c.* quadratus *.k.*; ergo ex *.h.* et *.k.* constat *.q.* numerus. Dico autem quod in *.q.* numero maior est quadratus quam numerus *.k.* Ita dico si *.a.* non est quaternarius sed maior.

Sit enim radix quadrati *.a.* numerus *.n.* radix *.k.* quadrati numerus *.s.* quia igitur ex *.a.* in *.c.* fit *.k.* necesse est eius radicem hoc est numerum *.s.* esse medio loco proporcionalem inter *.a.* et *.c.* ex quo sequitur numerum *.s.* fieri ex ductu *.m.* in *.z.* quod ita videri potest. Ex *.n.* in *.m.* fit *.a.* ex *.m.* in *.z.* fiat *.y*; ergo que est *.m.* ad *.z.* ea est *.a.* ad *.y.* Item ex *.m.* in *.z.* fit *.y.* sed ex *.z.* in *.z.* fit *.c*; ergo que est *.m.* ad *.z.* ea est *.y.* ad *.c*; ergo que est *.a.* ad *.y.* ea est *.y.* ad *.c*; ergo *.y.* est *.s.* Fit igitur ex *.m.* in *.z.* numerus *.s*; sed ex *.a.* in *.t.* fit *.h.* Cum ergo *.t.* non fit minus numero *.z.* et *.a.* quadratus fit ad minus triplum ad .m. suam radicem oportet ut numerus *.h.* sit ad minus triplus ad *.s.*; ergo numerus *.q.* addit super *.k.* quadratum plus numero qui colligitur ex radice *.s.* et proxima radice maiori; habet itaque *.q.* numerus maiorem quadratum numero *.k.* ex .30; habes itaque propositum si *.a.* non est quaternarius.

Si enim *.a.* sit quaternarius non necesse est semper evenire quod dicitur. Sit enim *.a.* quaternarius et sit *.t.* equalis numero *.z.*; tunc tamen non provenit propositum; quia tunc ex *.a.* in *.t.* fit duplum ad *.s.* Unde *.q.* addit supra *.k.* numerum duplum *.s.* numeri. Quadratus vero proximo maior *.k.* quadrato addit super eum duplum numeri *.s.* et unitatem. Si autem *.a.* est quaternarius et *.t.* numerus equalis est *.z.* radici tunc multiplicato *.a.* in *.q.* procedet numerus non quadratus quadratum habens maiorem *.k.* quadrato maximo in numero *.q.* Si autem *.t.* sit vel una unitate maior numero *.z.* provenit propositum sive *.a.* sit quaternarius sive maior quadratus sicut patet attendenti. Hec est ergo prior pars proposicionis hoc loco proposite.

Sit vero ut *.t.* numerus minor sit numero *.z.* sit autem ad *.t.* numerum sextuplus *.z.* numerus ducaturque *.a.* in *.tc.* et fiat *.hk*; in hunc ductus *.a.* producit *.fg.* In hunc eciam ducatur et fiat *.AB.*

Item in hunc eciam et procedat .*CD*. in quem eciam ductus .*a*. fiat .*EF*. et in hunc multuplicatus procedet .*GH*; sit vero .*g*. quadratus productus ex .*a*. in .*k*; ex .*a*. in .*g*. producatur .*B*. ex .*a*. in .*B*. producatur .*D*. ex .*a*. in .*D*. producatur .*F*. ex .*a*. in .*F*. fiat .*H*. Oportet igitur ut ex .a. in .*f*. producatur .*h*. ex .*a*. in .*h*. fiat .*f*. ex .*a*. in .*f*. procedat .A; ex .*a*. in .*A*. fiat .*C*. ex .*a*. in .*c*. fiat .*z*. ex .*a*. in .*z*. fiat .*G*. Dico igitur quod ad minus in numero .*GH*. et quadratus maior .*H*. quadrato. In uno autem occurret quod quero, quia enim ex .*a*. in .*c*. fit .*k*. necesse est ex .*m*. in .*z*. fieri .*s*. Fiat autem .*l*. ex .*a*. in .*z*; ergo que est .*z*. ad .*t*. ea est .*l*. ad .*h*. ergo proporcio .*l*. ad .*h*. est sextupla, sed ex .*m*. in .*z*. fit .*s*.; ergo cum ex .*a*. in .*z*. fiat .*l*. ea est proporcio .*l*. ad .*s*. que est .*a*. ad .*m*. sed proporcio .*a*. ad .*m*. dupla est ad minus utpote si .*a*. est quaternarius. Est igitur .*l*. numerus ad .*h*. sextuplus .*l*. ad minus duplus ad .*s*.; ergo .*s*. ad maius est triplus ad .*h*. numerum. Item ex .*a*. in .*k*. fit .*g*. ergo ex .*m*. in .*s*. fit radix quadrati .*g*. sit illa .*d*; fiat autem ex .*a*. in .*s*. numerus .*n*.; ergo que est .*a*. ad .*m*. ea est .*n*. ad .*d*; ergo proporcio .*n*. ad .*d*. dupla est ad minus; sed item que est proporcio .*s*. ad .*h*. ea est .*n*. ad .*f*; est igitur .*n*. ad .*f*. triplus ad maius .*s*. ad .*h*. triplus ad maius .*s*. ad .*d*. duplus ad minus; ergo .*d*. ad .*f*. est sesquialter ad maius. Ad hunc modum videri potest quod numerus factus ex .*a*. in .*d*. qui fit .*p*. duplus est ad minus ad radicem .*B*. quadrati que sit .*x*. et quod idem numerus .*p*. est ad maius sesquialter ad .*A*. numerum. Minor est igitur proporcio .*p*. numeri ad .*A*. numerum quam sit eiusdem .*p*. ad .*x*; ergo maior est .*A*. numerus numero .*x*. ergo iuxta priorem huius partem numerus habet maiorem quadratum quadrato .*B*. Habes igitur in tercia multiplicacione quod ad tardius in sexta multiplicacione futurum promiseram. Unde videre potes quod quamvis .*t*. contineatur a numero non omnino sexies sed quinquies eum teneat et aliquantulum plus proveniet tamen ad tardius in quinta multiplicacione ut numerus productus habeat quadratum maiorem quadrato qui fit ex .*a*. in maximum quadratum numeri ex quarta multiplicacione procreati. Si vero quod non credo in quinta multiplicacione non occurrerit ultra sextam propositum morari non posset; transfer igitur ad numerus quod in literis dicitur et videbis quod dico verum esse.

37. Si duo proximi quadrati et numerus factus ex ductu radicis in radicem congregentur in unum numerum numerus totalis una unitate habundabit super triplum numeri producti ex radice in radicem multiplicata.

Verbi gracia: sint .*a*. et .*b*. due proxime radices erit igitur .*b*. que sit maior erit inquam .*a*. et unitas. Probabo autem quod .*c*. exeunte quadrato numeri .*a*. quadrati .*b*. et .*a*. numerorum valent bis .*a*. et bis .*c*. et unitatem. Sit enim .*d*. quadratus numeri .*b*. ergo ex .33[a]. .*d*. constat ex .*a*. et .*b*. et .*c*; ergo constat ex .*a*. bis et unitate et .*c*; ergo adiecto .*c*. qui est quadratus .*a*. numeri totus numerus constans ex .*c*. et .*d*. constat ex .*a*. bis et .*c*. et unitate sed ex duplo numeri .*a*. in .*a*. fit bis .*c*. et ex duplo numeri .*a*. in unitatem fit bis .*a*. ergo ex duplo numeri .*a*. in .*b*. fit bis .*a*. et bis .*c*. ergo bis .*a*. et bis .*c*. duplum est ad id quod fit ex .*a*. in .*b*. quod sit .*h*; ergo quod congregatur ex bis .*a*. et bis .*c*. et numero .*h*. est triplum ad .*h*. Adde ergo unitatem quia .*c*. et .*d*. valent bis .*a*. et bis .*c*. et unitatem; ergo .*d*. et .*c*. et .*h*. habundant super triplum ad .*h*. in unitate; et videbis propositum.

38. Si duorum numerorum alter in alterum multiplicetur et quidam tercius in productum fiet numerus equalis ei qui producitur altero duorum multiplicato in totum multiplicem reliqui quot sunt unitates in tercio.

Verbi gracia: sint tres numeri .*a.b.c*. quorum .*a*. ducatur in .*b*. vel e contrario et fiat .*d.* Item ducatur .*c.* in .*d*. et fiat .*h*. Sit autem .*z*. numerus multiplex numeri .*a*. et numeret .*a*. numerus numerum .*z*. secundum .*c*. numerum. Dico eciam quod .*h*. fit ex .*z*. in .*b*. multiplicato. Que est enim .*h.* ad .*d*. ea est proporcio .*c*. ad unitatem; ergo que est .*h*. ad .*d*. ea est .*z.* ad .*a*. et que est .*d*. ad .*b*. ea est .*a*. ad unitatem; ergo que est .*h*. ad .*b.* ea est .*z*. ad unitatem; ergo facto .*h*. primo et .*b*. secundo, item .*z.* tercio et unitate quarto oportet ut quod fit ex .*h*. in unitatem sit equum ei quod fit ex .*b*. in .*z*; sed ex .*h*. in unitatem fit .*h*; ex hoc sequi propositum.

39. Oportet ut una radice in alteram multiplicata procedat radix cubi qui producitur cubis illarum radicum altero in alterum multiplicatis.

Patet quod quadrato in quadratum multiplicato producitur quadratus cuius radix producitur ex radicibus quadratorum multiplicancium. Simile autem probabo in cubis. Sint enim *.a.z.* et *.q*. tres cubi quorum *.q*. fiat ex ductu *.a*. in *.z.* et sit *.c*. radix *.a*. cubi et *.t*. radix *.z*. cubi ex *.c*. in *.t*. fiat *.x*; dico quod *.x*. est radix cubi *.q*. Si enim non sit eius radix *.h*. sit quoque *.b*. quadratus *.c*. radicis et *.a*. cubi. Est igitur proporcio *.q*. ad *.z*. sicut *.a*. ad unitatem; sed ex *.c*. in *.c*. fit *.b*; ergo proporcio *.b*. ad *.c*. est sicut *.c*. ad unum. Item ex *.c*. in *.b*. fit *.a*; ergo proporcio *.a*. ad *.b*. est sicut *.c*. ad unum. Ex hoc patet quod proporcio *.a*. ad unitatem est sicut proporcio *.c.* ad unum triplicata; ergo proporcio *.q*. ad *.z*. est sicut *.c*. ad unitatem triplicata; sed que est *.x*. ad *.t.* ea est *.c*. ad unum; ergo proporcio *.q*. ad *.z*. est proporcio *.x*. ad *.t*. triplicata; sed eadem est proporcio *.h*. ad *.t*. triplicata, ergo ex .11. octavi Euclidis *.h*. est *.x*. Ex hoc planum est factum quod proponebatur explicandum.

40. Si trium cuborum primus non est octonarius et ductus in secundum producit tercium tunc si quadratus primi cubi non est minor radice tercii idem primus ductus in numerum constantem ex cubo secundo et quodam numero habundante super radicem tercii ad minus binario producit numerum in quo est maior cubus eo qui ex primo in secundum producitur. /Glosa. Quod cubo in cubum alium vel in se ipsum multiplicato cubus procedat patet ex tercia et quarta noni Euclidis. Quod vero ex cubo in non cubum multiplicato vel e contrario producitur non cubus dicit corelarium quinte eiusden in eodem./

Sit enim ut *.c*. cubus cuius quadratus *.b*. et radix *.a*. sit ducatur in cubum *.q*. habentem *.x*. radicem et producat *.g*. cubum tercium eius radix sit *.k*.; fit igitur *.k*. ex *.a*. in *.x*; sit eciam ut numerus *.z*. excedat numerum *.k*. ad minus binario et *.b*. quadratus primi cubi non sit minor *.k*. numero. Fiat autem ex *.c*. in *.zq*. numerus *.fg*. Dico in numero *.fg*. esse maiorem cubum numero cubico *.g*.

ponam enim ut *.h.* triplum sit numeri *.k.* proxima vero ulterio radix post *.k.* sit *.m.* Cum igitur *.c.* cubus sit maior octonario erit *.a.* non minus ternario; sed *.b.* non est minus *.k.* ergo *.c.* non est minus *.h.* Si autem ei quod fit *.k.* multiplicato in *.m.* et ternario in productum addatur unitas fiet summa qua *.g.* cubus exceditur a proximo maiori cubo sicut patet ex .33[a]. huius; ergo sicut patet ex .34. huius si ei quod fit ex *.h.* in *.m.* addatur unitas fiet summa qua idem *.g.* cubus superatur a suo proximo superiori cubo; sed *.z.* ad minus una unitate excedit *.m.* et *.c.* non est minus *.h.*; ergo plus quam illa summa fit ex *.c.* in *.z.* ergo *.f.* est plus quam illa summa ergo in numero *.fg.* est maior cubus *.g.* Hoc autem fuit ostendendum.

41. Si vero quomodolibet aliter res se habuerint necesse est nichilominus ut cubo in cubum et aliquid multiplicato et deinde in productum et item in illud productum et sic aliquociens necesse est inquam ut in numero ex ultima multiplicacione producto ad minus sit cubus maior eo qui fit ex primo cubo ducto in cubum maximum illius numeri qui ex penultima multiplicacione procreatur.

Sit primo ut maneant omnia predicta hoc solo excepto quod dictum est *.c.* non esse octoniarum; sit autem *.c.* octonarius; contingere ergo potest quod in *.fg.* non est maior cubus *.g.* cubo; ut sit *.b.* sit equalis *.k.* et numerus *.z.* tantum unitate excedat numerum *.m.* quia enim ex *.a.* binario in *.b.* fit *.c.* erit *.c.* duplum ad *.b.* sed *.h.* est triplum ad *.k.* ergo *.c.* est minus numero *.h.* tercia sua parte; sed *.z.* sola unitate vincit *.m.* numerum; ergo ex *.c.* in *.z.* fit minus quam ex *.h.* in *.m.* ex quo sequitur in *.fg.* numero *.g.* esse maximum cubum; sed tunc si ex *.c.* in *.f.* fiat *.p.* et ex *.c.* in *.g.* fiat *.s.* necesse est in numero *.ps.* esse maiorem cubicum *.s.*

Sit enim *.t.* radix cubi *.s.* triplus numeri *.t.*; sit *.l.* proxima maior radix sit *.d.* Fit igitur *.t.* ex *.a.* in *.k*; ergo *.t.* est duplum ad *.k*; ergo eciam ad *.b*; ergo *.t.* numerus est equalis numero *.c*; ergo numerus *.l.* qui est triplus ad *.t.* est eciam triplus ad *.c.*; sed ex *.c.* in *.z.* fit *.f.*; ergo *.f.* est octuplus ad *.z.*; ergo est plusquam octuplus ad *.k*; ergo est plusquam quadruplus ad *.t.*; ergo est plusquam quadruplus ad *.c.* sed in *.f.* fit *.p*; ergo *.p.* est octuplus ad *.f.* et *.f.* est plusquam quadruplus ad *.c.*; ergo *.p.* continet *.c.* plusquam tricecies bis; sed sola unitate exceditur *.c.* numerus a numero *.d.*; ergo *.p.* continet *.d.* plusquam vigesies octies. Item *.l.* est triplus ad *.t.* sed *.t.* est octuplus ad unitatem ergo *.l.* vigesies quater continet unitatem; sed ex ductu *.l.* in *.d.* fiat *.y.* ergo *.y.* continet vigesies quater *.d.* numerum; ergo maior est *.p.* numerus numero *.y.* et addit super eum plus unitate; ergo in numero *.ps.* est maior cubus numero *.s.* et hoc volui ostendere.

Sit autem ut *.k.* radix sit quadrupla ad numerum *.b.* et sit pro libito seducupla ad numerum *.z.* et fiat ex *.c.* in *.f.* numerus *.d.* ex *.c.* in *.g.* numerus *.s.* cuius radix *.t.* Item ex *.c.* in *.d.* procedat *.q.* ex *.c.* in *.s.* fiat *.p.* cuius radix *.b.*; sic ergo ad *.b.* duplus est ad minus *.c.* Sit vero duplus hoc est octonarius; ergo *.a.* est binarius; sed ex *.a.* in *.k.* fit *.t.* quia ex *.c.* in *.g.* fit *.s.*; ergo *.t.* est duplus ad *.k.*; ergo est quadruplus ad *.f.* quia *.k.* est sedecuplus ad *.z.* et *.f.* ex *.c.* in *.z.* factus est ocuplus ad *.z*; ergo *.k.* est duplus ad *.f.* ergo *.t.* qui est duplus ad *.k.* est quadruplus ad *.f.*; sed ex *.c.* in *.f.* fit *.d*; ergo *.d.* es octuplus ad *.f.*; ergo est duplus ad *.t.*; sed *.b.* est duplus ad *.t.* quia *.b.* fit ex *.a.* in *.t.* eo quod ex *.c.* in *.s.* fiat *.p*; ergo *.d.* et *.b.* sunt equales. Fiat adhunc ex *.c.* in *.q.* numerus *.r.* et ex *.c.* in *.p.* fiat *.l.* cuius radix *.m.* est igitur *.q.* ad *.d.* octuplus ergo eciam ad *.k.* sed *.m.* est duplus ad *.b*; ergo *.q.* est quadruplus ad *.m.* ergo *.r.* qui est octuplus ad *.q.* continet *.m.* tricecies bis. Multiplicetur iterum *.c.* in *.r.* et fiat *.h.* et in *.m.* et fiat *.x.* eius radix sit *.n.* Est igitur *.n.* duplus ad *.l.* ergo *.r.* continet *.n.* numerum sedecies; sed *.h.* est octuplus ad *.r.* ergo *.h.* continet *.n.* cencies vigesies octies; quia ex octo in .16. fiunt .128. Tene igitur hoc. Item *.k.* est duplus ad *.c.* quia est quadruplus ad *.b.* ergo *.t.* quater continet *.c.* ergo *.b.* octies; ergo *.m.* sedecies; ergo *.n.* tercies bis continet *.c.* procedam iterum; et ex *.c.* in *.h.* faciam *.y.* ex *.c.* in *.x.* fiat *.b*; ergo *.y.* continet *.h.* octies; sed ex .8. in .128. fiunt .1024. ergo *.y.* continet *.n.* millies vigesies quatuor. Sit autem radix cubi *.b.* numerus *.I.* ergo hic numerus est duplus ad *.n.* ergo continetur in *.y.* numero quingencies duodecies; continet igitur *.d.* numerus numerum *.y.* octies, sed octo in .512. faciunt .4096. ergo in *.d.* est *.I.* numerus secundum .4096.; ergo secundum eius dimidium hoc est secundum hunc numerus .2048. continet *.b.* numerus numerum *.l.* numerus ergo *.l.* continet *.c.*

cubum bis sexagesies quater hoc est cencies vigesies octies. Item ex .*c*. in .*y*. fiat .*m*. ex .*c*. in .*m*. fiat .*M*. cuius radix sit .*D*.; continet igitur .*n*. numerus numerum .*D*. milies vigesies quater; quia .*n*. est duplus ad .*l*. Cubus vero .*t*. continetur in numero .*n*. ducensies quinquagesies sexies. Sit autem .*a*. triplus ad .*D*.; ergo .*d*. numerus continet .*a*. plusquam trecencies quadragesies. Item sit .*N*. proxima radix post .*n*. excedens eam unitate nota tamen quod continet .*N*. numerus numerum .*c*. ducencies quinquagesies sepcies; pluries ergo continet .*M*. numerus numerum .*H*. quam numerus .*N*. numerum .*c*. Sit ergo .*d*. primum .*A*. secundum. tercium .*n*. quartum .*c*. quia ergo maior est proporcio primi ad secundum quam tercii ad quartum necesse est ex .*d*. in .*c*. plus fieri quam ex .*H*. in .*n*. Ex hoc infer quod in numero .*LM*. est maior cubus .*M*. cubo et ita habes quod voluisti. Vides igitur quod posito octonario qui minimus est cuborum provenit tandem propositum; multo ocius proveniet posito maiori cubo. Ad hunc itaque modum negocianti necesse est etsi non statim aliquando tamen quod querit occurrere.

42. In minuciis radicem non habentibus non potest radix non vera tam propinqua inveniri ut propinquius haberi non possit sive quadrate sive cubice fractionis radicem querere sit propositum.

Hec est propter quam premisse sunt tricesima (!) et eam hucusque sequentes. Ut ergo primo agam de philosophicis minuciis et primum de radice quadrata; sit data minucia $\frac{ag}{.b.}$ quod non possit quadrari sed sit .*b*. eius denominans quadratus. Hoc enim in omni minucia haberi potest. Numerus vero .*ag*. qui est numerans non sit quadratus. Sit item denominacio philosophica .*z*. ex quo numero multiplicato in se et in productum et item in id et sic deinceps quociens opus est productus sit .*b*. numero in aliquo imparium locorum sicut oportet occurrens. Occurrat autem in quinto ubi est locus quartorum. Sunt igitur $\frac{ag}{.b.}$ unius integri $\frac{ag}{.z.}$ unius tercii huius minucie scilicet .*b*. radix queratur; et inventa radice huius numerantis .*<u>ag</u>*. veris fieri potest; sit ipsa numerus .*s*.

qui in se ductus consumat .*g*. de .*ag*. Item radix .*b*. numeri quadrati sit .*t*. numerus. Est igitur $\frac{s}{.t.}$ vera radix minucie $\frac{g}{.b.}$ vere quadrate. Dico quod minucie $\frac{ag}{.b.}$ potest inveniri propinquior radix hoc est propinquius eam consumens si in seipsam multiplicetur.

Verbi gracia: tranferatur minucia $\frac{ag}{.b.}$ ad ulteriorem locum utpote ad septimum ubi est locus sextorum nonne autem hoc faciam sic. Multiplicando per denominacionem philosophicam per .*z*. videlicet numerus .*ag*. et tunc .*z*. ducatur in productum; tunc autem fiat .*fc*. eruntque $\frac{ag}{.b.}$ unius integri .*fc*. sexta. Si autem velim habere denominacionem sextorum quam habent respectu integrorum nonne ducam .*z*. in .*b*. et deinde in productum fiat autem tunc .*d*. Hoc patet attendenti naturam philosophicarum minuciarum et octavam et 13^am^. huius. Est igitur minucia $\frac{ag}{.b.}$ equalis immo eadem minucie $\frac{fc}{.d.}$ Sed vide quod multiplicavi .*z*. in .*ag*. et in productum et processit .*fc*. ergo per .37. priori ex ductu .*l*. qui sit quadrtus numeri .*z*. in .*ag*. fit *fc*. Similiter ex .*l*. in .*b*. fit .*d*. unde palam quod $\frac{ag}{.b.}$ est equalis $\frac{fc}{.d.}$ minucie. Ponam autem ut ex .*l*. in .*a*. fiat .*f*. et ex .*l*. in .*g*. quadratum fiat .*c*. quadratus. Utrum ergo in numero .*fc*. sit maior quadratus .*c*. quadrato potest sciri inspectis numeris; sciri inquam potest ex .32. huius; quod si non est dico quod de minucia $\frac{fc}{.d.}$ non extrahitur maior radix quam est radix $\frac{s}{.t.}$. Sit enim radix .*d*. numeri numerus .*q*. radix numeri .*c*. sit .*p*. numerus; constat autem quod non extrahitur ex minucia $\frac{fc}{.d.}$ habente hos numeros maior est radix quam $\frac{p}{.q.}$ Habebo ergo propositum probato quod minucia $\frac{p}{.q.}$ est minucia $\frac{s}{.t.}$.

Ad hoc sic. ex .*l*. in .*g*. fit .*c*. et ex .*l*. in .*b*. fit .*d*: ergo minucia .*gb*. est .*cd*. Cum ergo quadrata minucia sit eadem quadrate oportet ut radix radici sit eadem. Quod si in .*fc*. numero est maior quadratus quam numerus .*c*. tunc eciam extrahitur de .*fc*. maior radix .*p*. et ita sicut patet extrahitur de minucia $\frac{fc}{.d.}$ maior radix quam minucia $\frac{p}{.q.}$; ergo eciam maior quam minucia $\frac{s}{.t.}$. Quod si in numero .*fc*. non occurrit maior quadratus quadrato .*c*. transferatur minucia $\frac{fc}{.d.}$ in novum per multiplicacionem numeri .*l*. in numerantem et denominantem sicut modo facta est translacio de quinto loco ad septimum et deinde si opus est de nono ad .XI^{m}. et ita donec occurrat numerans habens maiorem quadratus eo qui producitur ex .*l*. in maximum precedentis numerantis quadratum ducto. Quod autem hoc tandem eveniat patet ex secunda parte .32^{e}.

Ex hoc ergo apparet rem diligenter intuenti quod quanto ulterius et remocius ab integris deducitur minucia tanto propinquius radix invenitur in extractione radicis quadrate minucie. Quod autem idem contingat in cubicarum radicibus extrahendis ita considera Sit data minucia philosophica in septimo loco qui est secundus quartus et est sextorum et sit eius numerans .*ab*. habens .*b*. maximum cubum cum ipse non sit cubicus. Apparet autem ex .34. quod sextorum denominacio cubica respectu integri sit ilia .*c*. cuius radix sit .*s*. extrahatur autem cubice radix numeri .*ab*. et sit .*q*. erit itaque .*q*. vera radix .*b*. cubi. Extracta est igitur .*qs*. radix $\frac{ab}{.c.}$ minucie quanto propinquius fieri potuit in hiis numeris; dico haberi posse propinquiorem hoc est maiorem radicem. Quanto enim radix nonvera maior tanto propinquior. Traducatur ergo minucia $\frac{ab}{.c.}$ ad tercium quartorum locorum hoc est ad decimam ubi est locus nonorum. Faciam autem sic. Multiplicabo per philosophicam denominacionem que sit .*p*. numerum .*ab*. et ducam iterum .*p*. in productum et item in illum productum et fiat .*fg*. Et si ducatur .*p*. in .*c*. cubum et in producum et item in productum et fiat *.h.* Dico quod *.fg.* nona sunt $\frac{fg}{.h.}$ minucia unius integri. Ad hoc sic: numerus .s. est radix numeri cubici *.c.* erit igitur ut patet intuenti *.s.* denominacio secundorum respectu integri cum *.c.* sit denominacio sextorum respectu integri; est igitur *.s.* quadratus numeri *.p.* cum *.p.* sit denominacio minutorum respectu integri quod patere potest per .13. huius. Fiat autem ex *.p.* in *.s.* numerus *.m.* ergo *.m.* est cubus *.p.* numeri. Ostendam autem quod ex *.m.* in *.c.* fit *.h.* Fiat enim ex *.p.* in *.c.* numerus *.n.* in hunc *.p.* faciat *.k*; ergo ex *.p.* in *.k.* fit *.h.* Item in *.c.* ducatur *.p.* et fit *.n.* in *.n.* ducatur *.p.* et fit *.k*; ergo ex ductu *.s.* in *.c.* fit *.k.* ex .37; nonne ergo *.s.* in *.c.* multiplicatur et fit *.k.* et *.p.* in *.k.* et fit *.h.* Sed quociens *.p.* continet unitatem tociens *.m.* continet *.s.* ergo ex .34. ex *.m.* in *.c.* fit *.h.* eadem racione ex *.m.* in *.ab.* facto *.fg.* ergo $\frac{ab}{.c.}$ est minucia $\frac{fg}{.h.}$ Item ex *.p.* in *.s.* fit *.m*; ergo *.m.* est denominacio terciorum; sed ex terciis in sexta fiunt nona; ergo cum ex *.m.* in *.c.* fiat *.h.* oportet ut nonorum denominacio ad integrum sit numerus *.h*; ergo $\frac{fg}{.h.}$ sunt *.fg.* nona. Recte ergo traduxi sexta ad nona multiplicando numeros per *.m.* cubum philosophice denominacionis.

Ponam autem quod ex *.m.* in *.b.* fiat *.g.* si ergo *.fh.* est *.g.* maximus cubis radix extracta in hiis numeris de municia $\frac{fg}{.h.}$ erit vera radix minucie $\frac{g}{.h.}$. sed minucia hec est minucia $\frac{b}{.c.}$ ergo radix unius est radix alterius. Non ergo inventa est ad hunc maior radix. Si vero in numero *.fg.* est maior cubus numero sit ille *.y.* ergo minucia *.h.* maior est minucia *.c.* ergo eciam habet maiorem radicem; sed eius radix extrahitur de minucia $\frac{fg}{.h.}$ si *.y.* est maximus cubus in numero *.fg.* habes ergo ex hiis viam rei quam queris.

Si autem in numero *.fg.* maximus cubus est *.g.* multiplicata per *.m.* numerum minucia $\frac{fg}{.h.}$ et reduxeris eam ad .13^{m}. locum qui est duodecimorum et est quartus quartorum locorum; et si ibi invenis in numero numerante maiorem cubum illo qui fit ex *.m.* in *.g.* invenies ibi maiorem radicem. Sive autem hoc sit sive non si numeros ibi inventos iterum multiplicaveris per *.m.* traduxeris minuciam ad locum .16^{um}. quod autem in aliqua tali traductione invenies in numerante maiorem cubum eo qui fit ex *.m.* in maximum cubum prioris numerantis patet ex probacione secunde partis proxime. Hoc autem invento invenies maiorem radicem quam in loco precendenti.

Sive igitur quadratam sive cubicam radicem queris ubi vera inveniri non potest quanto minuciam nec quadratam nec cubicam magis ab integris distare feceris per modum quem dixi tanto propinquius radicem invenies et minus in operacione relinquis. Non tamen necesse est in infinitum procedi sed cum illic veneris ubi tam modicum aliquid relinquitur ut illius omissio non faciat errorem sensibilem procedi ultra superfluit. Si autem vulgaris minucie nec quadrate nec cubice radicem queris per quemlibet quadratum si radicem quadratam et per quemlibet cubum si cubicam radicem queris multiplica numeros minucie ad quadratam vel cubicam denominacionem reducte; et quanto sepius multiplicaveris tanto propinquiorem radicem invenies sicut ex premissis patere potest.

Hec sunt que de minuciis scienda et ideo colligenda putavi et eia (¡) finit.

Luego proceda el cálculo de fracciones, ya mismo. Cuando una cantidad menor /por ejemplo 3/ multiplicada según algún número /por ejemplo según 4/ da una mayor, la cantidad menor /3/ se llama parte multiplicadora de la mayor /como 12/, o parte alícuota, o parte simplemente, con nombre restricto. El número /por ejemplo 4/ según el cual la cantidad menor /3/ multiplicada da una mayor es la denominación de la parte al todo. Luego es el denominador /4 en el ejemplo/ en el cual tantas veces /porque es cuarto/ está la unidad cuantas la parte denominada /es decir 3/ está en el todo. Fracción o quebrado es la cantidad numerada y denominada /como 3/. Puede ser una sola parte, como un quinto, o varias partes, como tres cuartos. A veces es igual al todo, como tres tercios. A veces es menor, como tres cuartos, a veces mayor, como cinco tercios. El numerador /3/ es aquel en el cual se toman tantas unidades como partes hay en la fracción.

Multiplicar una fracción por otra fracción es hallar por una operación, un número y una denominación de la cantidad, de tal modo que se relacione a la otra de las producidas, como la restante se relaciona al entero.

Dividir una fracción por otra fracción es la operación de hallar un número y una denominación de la cantidad cuya proporción al entero sea igual a la de la fracción dividida a la divisora.

Fracción cuadrada es el cuadrado del numerador y el denominador, o bien así: cuadrada es la fracción que resulta de una fracción multiplicada por sí misma. Cuando se hace esto, el multiplicador es la raíz del producto.

Cúbica es la fracción que tiene por numerador y denominador los números cúbicos, o sea una fracción producida por una doble multiplicación de sí misma. Cuando se hace esto el multiplicador se llama raíz del producto.

Cuando se haya dividido cualquier todo en .60. minutos, y cualquier minuto en .60. segundos y siguiendo los segundos en terceros y así al infinito, las fracciones así tomadas se llaman filosóficas, pues las usan sobre todo los filósofos.

Las otras se llaman comunes. Las comunes difieren de las filosóficas en el modo de escribirse. Pues las comunes se escriben poniendo el numerador sobre el denominador. Por ejemplo, tres cuartos lo escribo así: $\frac{3}{4}$. Pero en las fracciones filosóficas nunca se escribe el denominador porque es seguro que ellas se denominan por el .60. y también se distinguen por los lugares en su configuración. Pues el primer lugar es de los enteros, el segundo de los minutos, el tercero de los segundos, el cuarto de los tercios y así siguiendo.

Comentario. En este prólogo se presentan algunos preliminares, sobre todo de terminología y definiciones, necesarios teniendo en cuenta la indecisión al respecto entre los maestros de la época.

Se explica qué significan las expresiones *multiplicare*, *dividere*, *quadratus*, *cubus*, *radix*, para fracciones dadas.

Multiplicar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ significa hallar una fracción $\frac{A}{B}$ que cumpla con la condición $\frac{A}{B} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} :1$; y asimismo dividir la fracción $\frac{a}{b}$ por la fracción $\frac{c}{d}$ significa el cálculo de una fracción $\frac{C}{D}$ que cumpla la condición $\frac{C}{D} :1 = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$. Observa Eneströn con respecto a la definición de la palabra *multiplicare*, que Gernardo toma una definición real, mientras que la de Jordano pasa por la palabra *productus* (también usada por Gernardo, y en varios casos implícita). Por otra parte, en vistas a Euclides, "producto" es el modo actual de traducir la expresión griega "resultante" o "producido a partir de" una multiplicación (Cf. Puertas Castaños, p. 141)

También Gernando se refiere a las dos grandes clases de fracciones, las sexagesimales (*minutiae philosophicae*) y las fracciones comunes (*minutiae vulgares*). Vemos aquí una diferencia terminológica con

Jordano, quien llama a las fracciones comunes *minutiae vagae sumptionis*, en Gernardo "*minutiae vulgares*". Jordano no trata especialmente las fracciones sexagesimales, sin su generalización, es decir, cuando se tiene 60 se toma un número entero cualquiera y tales fracciones se llaman *minutiae ordinariae consimiles*. En cambio Gernardo trata explícitamente las fracciones sexagesimales, a las que llama "fracciones filosóficas".

La señal distintiva de ambos tipos, en Gernardo, es el modo de escribirlas. En las fracciones comunes el numerador se escribe sobre el denominador, pero sin raya de fracción. En las fracciones sexagesimales el denominador por lo general no se escribe. Se escriben de izquierda a derecha (conforme se ve en el Teorema 10), primero el número entero, si hay alguno, después el número de los minutos, el de los segundos, etc. Es decir, el valor de los números se indicará por su posición. Este procedimiento de correr el lugar hacia los enteros, comenzando por el valor menor y reducir de lo menor a lo mayor, es similar al de la representación de los números en el ábaco altomedieval para efectuar sumas. Por su parte, Jordano escribe
8
10
32
57 por 2º 10' 32" 57"', mientras que Gernardo pone 2 10 32 57

Y en cuanto a las fracciones comunes, Eneström hace notar que Jordano nunca escribe propiamente fracciones comunes en forma de fracciones, utilizando palabras (por ejemplo para $\frac{b}{c}$ "minutie numerante a *b*, denominante a *c*"), y Gernardo para $\frac{a}{b}$ generalmente escribe *ab* (es decir, escribe primero el numerador y segundo el denominador), y a veces $\frac{a}{b}$.

Finalmente, Eneström compara la "*Demonstratio Jorndanis de minutiis*" con esta obra y comprueba que allí faltan estos teoremas; 5,15,17,19,21,22,26,29,32,24 Con todo -señala- son teoremas de importancia muy secundaria, así que su falta no acarrea propiamente ninguna discrepancia real entre los dos escritos. En cambio la diferencia entre ambos debe determinarse más bien en relación de la terminología y la manera de escribir.

1. La proporción del numerador al denominador es la misma que entre la facción y el entero.

Sea dada la facción $\frac{3}{4}$, digo que la proporción entre el tres y el cuatro es la misma que entre tres cuartos y el entero. Pues la relación de la unidad a la unidad es la misma que de un cuarto a una cuarta parte, por la conversa de la primera parte de la primera del Quinto Libro de Euclides, pero /por .15.5/ la proporción entre múltiplos y submúltiplos es la misma. Luego, la que hay del tres a la unidad es la misma que entre tres cuartos a un cuarto, y la que hay entre la unidad y el cuatro, es la misma que entre un cuarto y el entero según la descripción del denominador. Luego, según el Quinto Libro de Euclides, la proporción del tres al cuatro es la misma que entre tres cuartos y el entero. Lo cual fue demostrado.

Comentario. Se citan como referencia tres proposiciones de Euclides: V-1: "Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas"; V-5: "Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra, que una magnitud restada a la primera lo es de otra restada a la segunda; la magnitud que queda de la primer será también el mismo múltiplo de la magnitud que queda de la segunda que la magnitud entera de la magnitud entera", cuyas fórmulas son: $a:b = c:a;$ y $a:b = (a - c) : (b - d)$; y V-15: "Las partes guardan la misma razón entre sí que sus múltiplos, tomados en el orden correspondiente", cuya fórmula es: $a:b = ma:mb$.

Es importante el concepto de "dado". Gernardo parece usarla en un sentido común. Sin embargo se aprecia un concepto técnico cercano a las definiciones de Jordano en *De numeris datis*: 1. Un número ha sido dado cuya cantidad se conoce; 2. Un número ha sido dado en relación a otro si la razón de él a otro ha sido dada. 3. Una razón ha sido dada si su denominación es conocida. Se ve que Gernardo usa aquí implícitamente el tercer supuesto. La "denominación" (Gernardo usa repetidamente este término técnico) de una razón era su valor, que en el texto de Jordano aparece expresado con nombres especiales como los que catalogó Nicómaco de Gerasa en el s. I en su Aritmética: razón 1 1/3: "el mayor es el sesquitercio del menor", o con descripciones de la razón "uno contiene a otro él mismo y un tercio": $1\frac{1}{3}$, que incluso podían formarse con cuantavos a la manera egipcia: "uno con tanto y otro tanto y la mitad y la mitad de la mitad hace el otro": razón $3\frac{3}{4}$ expresada como $1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ (cf. Puig, art. cit., p. 52 y nota 11).

Fórmula de este teorema: $a{:}b = \frac{a}{b} : 1$. Debo añadir que comparto la inquietud de Puig (art. cit. p. 58) en cuanto a que una interpretación estándar de una fórmula de este tipo podría traducirse como "encontrar dos números tales que..." y por tanto convertir el enunciado del teorema en un problema. Sin embargo, la formalización ayuda a entender el sentido del texto, que muchas veces es oscuro.

En casi todos los teoremas de Gernando se usan segmentos para representar los números. La representación de los números por segmentos rectilíneos ya está presente en los teoremas de los Libros VII a IX de Euclides. También Al-Jwarismi, en su *Álgebra* usa letras con figuras, pero los coeficientes son números concretos, aunque en su obra está implícita la idea de que los resultados son generales, pero no tenía modo de expresar algebraicamente las proposiciones generales. Jordano a su vez seguía a Euclides en esta costumbre, representando un número como un segmento *ac*, y las dos partes de la división en *ab* y *bc*; pero utiliza las letras de los dos extremos para representar la primera parte del número y sólo *c* para representar *bc* (cf. Boyer, ob. cit. p. 332).

2. Si fueran dos fracciones del mismo denominador, la proporción entre una fracción y la otra sería igual a la de un numerador en relación al otro numerador.

Por ejemplo, sean las fracciones .*ac*. y .*bc*. teniendo .*c*. de común denominador. Digo que la proporción del numerador .*a*. al numerador .*b*. es la misma que entre la fracción .*ac*. y la fracción .*bc*. Pues la relación entre .*a*. y .*c*. es la misma que entre la fracción .*ac*. y el entero, conforme al teorema anterior. Y la que hay entre .*c*. y .*b*. es la misma que entre el entero y .*bc*. según la misma razón de conversión. Luego la relación. de .*a*. a .*b*. es igual a la relación de la fracción .*ac*. a la fracción .*bc*. Lo que fue demostrado.

Comentario. Fórmula: $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = a{:}c$.

3. Si el numerador de una fracción se pone como denominador de la segunda fracción, y el numerador de la segunda en el denominador de la primera, la proporción de la primera fracción a la segunda será la misma que entre el número producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segundo y el número producto de la otra multiplicación.

Por ejemplo, dadas las facciones .*ab*. y .*cd*., póngase el numerador .*a*. de una en lugar de .*d*. denominador de la otra y llámese .*f*. Y además póngase el numerador .*c*. de la otra en lugar de .*b*. denominador de la primera, y llámese .*g*. Digo que la proporción de la fracción .*ab*. a la fracción .*cd*. es igual que la proporción de .*f*. a .*g*.

Póngase también .b. en lugar de .*d*. y llámese .*h*. Por tanto, así, poniendo .*a*. en vez de .*d*. da .*f*. y .*b*. en lugar de .*d*. da .*h*. Luego, por el 15 del Quinto de Euclides, que dice que la proporción entre los múltiplos y los submúltiplos es la misma, la proporción de .*a*. a .*b*. es igual a la proporción de .*f*. a .*h*. Luego, por el primero de estos teoremas, la proporción de la fracción .*ab*. al entero es igual a la proporción de .*f*. a .*h*. Además, poniendo .*d*. en lugar de .*b*. da .*h*., y .*c*. por .*b*. da .*g*. Luego, la relación que hay entre .*d*. y .*c*. es la misma que entre .*h*. y .*g*. Luego, la [proporción] que hay entre .*h*. y .*g*. es la misma que entre entero y la fracción .*cd*. Luego la relación que hay entre .*f*. y .*g*. es igual a la relación de la fracción .*ab*. y la fracción .*cd*. que es lo que se quería demostrar.

Comentario. La fuente es Euclides V-15: "Las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos, tomados en el orden correspondiente" (ya mencionada).

Fórmula: $\frac{a}{c} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

4. La proporción de un entero a dos fracciones es igual a la del número producto de los denominadores de las fracciones y los dos números, de los cuales uno es el producto del numerador de una fracción por el denominador de la otra, y el segundo el de la multiplicación del otro denominador por el restante numerador.

Permanezca la anterior posición. Digo que la proporción del entero a la fracción *.ab.* y *.cd.* es igual a la proporción de *.h.* a *.f.* y *.g.* por el teorema anterior, pues la relación de *.f.* a *.g.* es igual a la de *.ab.* a *.cd.* Luego la relación entre la conjunción de *.f.* y *.g.* a *.g.* es la misma que entre *.ab.* y *.cd.* a *.cd.* Pero la relación de *.g.* a *.h.* es la misma que la de la fracción *.cd.* al entero. Esto puede comprenderse por la prueba anterior. Luego la relación entre *.f.* y *.g.* es igual a la que hay entre las facciones *.ab.* y *.cd.* y el entero. Luego, a la inversa, la relación de *.h.* a *.f.* y *.g.* es la misma que la del entero a las fracciones. *ab.* y *.cd.* Que es lo que se propuso demostrar.

Comentario. Fórmula: $1 : (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) = \frac{bd}{ad + bc}$.

5. Cuando dos fracciones /como .3.3./ **tienen un mismo numerador** /como .3./**, la proporción de la primera a la segunda es igual a la proporción del denominador de la segunda con respecto al denominador de la primera.**

Sea .a. el numerador de las fracciones *.ab.* y *.ac.* Digo que la proporción de *.c.* a *.b.* es la misma que de *.ab.* a *.ac.* Pues se multiplica .a. por *.c.* y da *.f.* Y lo mismo *.a.* por *.b.* y da *.g.* Luego, por la 16 del Quinto de Euclides, la proporción de *.c.* a *.b.* es la misma que de *.f.* a *.g.* Pero la proporción de *.f.* a *.g.* es la misma que la de la fracción *.ab.* a la fracción *.ac.*, por el tercero de estos teoremas. Luego la proporción entre *.c.* y *.b.* es la misma que entre *.ab.* y *.ac.* que es lo propuesto.

Comentario. La fuente es Euclides V-16: "Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales" (se deduce de las proposiciones 15, 11 y 14).

Fórmula: $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = c{:}b.$

6. Dadas dos fracciones, si la proporción entre el numerador de la primera y el numerador de la segunda es igual a la proporción entre el denominador de la primera y el denominador de la segunda, las fracciones son iguales y se convierten.

Sea la proporción de .*a*. a .*c*. igual a la proporción de .*b*. a .*d*.; digo que la fracción .*ab*. es igual a la fracción .*cd*. Pues se permutaría la proporción de .*a*. a .*b*. así como la proporción de .*c*. a .*d*. Luego, por el primero de estos teoremas, la proporción de la fracción .*ab*. al entero es igual que la de la fracción .*c*. al mismo. Luego, por la 10 del Quinto de Euclides, las fracciones dadas son iguales. La inversa es evidente. Porque si las fracciones .*ab*. y .*cd*. son iguales, entonces la proporción de ellas con el entero es la misma Luego, conforme al primero de estos teoremas, es necesario que la proporción de .*a*. a .*c*. sea la misma que la de .*b*. a .*d*. Que es lo que se quiso demostrar.

Comentario. La fuente es Euclides V-10: "De las magnitudes que guardan razón con una misma magnitud, la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma magnitud guarda una razón mayor, es menor". Esta proposición es la inversa de la octava. Introduce unas nociones de razón mayor o menor en un contexto en que la referencia a la definición V-7 puede ser insuficiente. Definición 7: "Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda, pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta". Es un criterio de no proporcionalidad. Parece ser original de Euclides mientras que la que la definición 5 es de Eudoxo (Puertas Castaños, T. 2, p. 13).

Fórmula: Si $a{:}c = b{:}d$, así es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y a la inversa se sigue de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ que $a{:}c=b{:}d$.

7. Reducir dos fracciones de denominadores diferentes al mismo número de fracciones de denominadores iguales.

Sean dos fracciones dadas *.ab*. y *.cd*. Póngase *.a*. numerador de una en lugar de *.d*. denominador de la otra y dé *.f.* Además póngase *.c*. en lugar de *.b*. y dé *.g*. y además *.b*. en lugar de *.d*. y dé *.h.* Digo que la fracción *.fh*. e igual a la fracción *.ab*. y que la fracción *.gh*. es igual a la fracción *.cd*.

Dado que se ha puesto *.a*. en lugar de *.d.* y dio *.f.*, y lo mismo *.b*. en lugar de *.d*. y dio *.h*., es necesario que la proporción de *.a*. a *.b.* sea igual a la proporción de *.f.* a *.h*. Luego, permutando, la proporción que hay de *.a*. a *.f.* es igual a la que hay de *.b*. a *.h.* Luego, por el teorema anterior, las fracciones son iguales. Prueba del mismo modo que las fracciones *.cd*. y *.gh*. son iguales y así reducirás las dos fracciones dadas a otras dos de las cuales es denominador común el número .h. Y esto es lo que se intentaba.

Comentario. Se trata de igualar fracciones.

8. Reduce enteros cualesquiera a fracciones de un denominador dado, poniendo el número del entero por el denominador de la fracción dada.

Si se da un solo entero, elige un número para hacer el denominador, haz, digo, con él, el numerador y el denominador como un todo, según se puede ver por el primero de estos teoremas.

Pero si se dan más enteros, sea el número dado *.d.* de denominador y sea *.a*. el número entero. Pon *.a*. en lugar de *.d*. y da *.c*. Digo que la fracción *.cd*. es igual a los enteros dados. Puesto que al poner *.a.* en lugar de *.d*. dio *.c*., es necesario que la proporción entre *.c*. y *.d*. sea igual a la del entero *.a*. y la unidad. Pero la proporción entre *.a.* y la unidad es igual a la de los enteros dados y un entero. Luego la proporción que hay de *.a*. a *.d*. es la misma que la de los enteros dados a un entero. Pero la proporción que hay de *.c.* a *.d.* es igual a la de la fracción *.cd*. a un entero, por el primero de estos teoremas. Luego por la 10 del Quinto de Euclides, los enteros dados son iguales a la facción *.cd*. Y esto se quería demostrar.

Comentario. La fuente es Euclides V-10: "De las magnitudes que guardan razón con una misma magnitud, la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma magnitud guarda una razón mayor, es menor" (ya mencionado).

Fórmula: $a = \frac{ab}{b}$.

9. Se muestra cómo se debe operar en la adición de las fracciones comunes.

Si se debe sumar una fracción a otra, redúcelas a fracciones de un mismo denominador, conforme al antepróximo adonde sean de uno, entonces añade un numerador al otro numerador y haz, de estas dos, una fracción cuyo numerador sea el número compuesto de los dos numeradores y sea denominador común de las dos fracciones el denominador, y obtendrás un resultado, y nada más hay que hacer para sumar una fracción a otra sino hallar una igual a las dos dadas.

Que esto se hace del modo que se acaba de decir, puede probarse por el segundo de estos teoremas, es decir completando la penúltima del Quinto. Pero si se debe añadir una [más] a las dos, reduce las dos fracciones a un [mismo] denominador y compone con ellas un resultado, como ya se ha mostrado. Después a estas dos agregadas, añade la tercera. Y de este modo es fácil añadir cuantas fracciones se quiera a cuantas otras se quiera.

Si quieres añadir fracciones a enteros, o enteros o facciones a enteros o fracciones, haz fracciones de un [mismo] denominador. A continuación reduce los enteros a fracciones de igual denominador. Después es fácil hacer lo que se ha hecho. Y con esto queda claro cómo se debe hacer la adición de las fracciones comunes.

Comentario. La fuente es Euclides V-24: "Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta". Afirma que la suma de dos relaciones (números reales) es independiente de la relación *a:c* ó *d;f*. Hay aquí una definición implícita de "adición de relaciones". Falta la definición de sustracción, que sería análoga. (Cf. M. T. Zapelloni, *Gli elementi*... cit. V, p. 70).

Fórmula: Suma de fracciones comunes. Si son sólo dos fracciones se procede según la regla: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

Para sumar más se añade la tercera fracción a la suma de las dos primeras, después la cuarta fracción a esta suma, etc.

10. Demostrar el cálculo de adición en las fracciones filosóficas.

Escribe ambas cantidades, aquella a la cual se debe hacer la adición escríbela arriba, de tal modo que el primer lugar hacia la izquierda sea el de los enteros. El siguiente el de los minutos, el tercero, el de los segundos, y así siguiendo. Escribe luego bajo el superior por orden la cantidad a sumar, o sea, tantas fracciones, o enteros con fracciones. Pon los enteros bajo los enteros, los minutos bajo los minutos, los segundos bajo los segundos y así siguiendo. Hecho esto, comienza por cualquiera de las partes y suma el número inferior puesto encima con su diferencia y escribe el resultado en el lugar de los enteros, escribe eso en el lugar de ellos, borrado lo que antes estaba allí. Pero en los otros lugares, es decir, en el lugar de los minutos, o de los segundos, etc. haz así: si la suma del inferior al superior diera menos de .60. pones eso por el superior, borrándolo. Si diera .60. borrarás lo que estaba arriba sin escribir nada allí sino la cifra en el lugar inmediato anterior hacia la derecha, y darás con la unidad, porque .60. sexagésimos hacen un entero del lugar precedente. En tal adición del inferior al superior, si hay encima alguna suma, no le pongas nada encima. La razón y el ejemplo son evidentes.

Comentario. Suma en las fracciones sexagesimales. Se puede comenzar por la izquierda o por la derecha, al contrario del procedimiento para las comunes. Se ha indicado explícitamente que se pueden escribir las fracciones de izquierda a derecha (no como en Jordano).

11. Dadas [dos] fracciones comunes o filosóficas, se expone de qué modo se sustrae una de otra.

Trataré primero de las comunes. Dadas las fracciones, o son de un [mismo] denominador, o si no son, se hacen. Después se sustrae un numerador del [otro] numerador y queda resuelta la operación. Lo que se puede probar por el segundo de estos teoremas, considerado qué es sustraer uno de otro.

En cambio, si se dan fracciones filosóficas, escríbase arriba aquella que no sea la menor, y colóquese la otra [debajo] de tal modo que los enteros queden bajo los enteros, los minutos bajo los minutos, etc. Después sustrae el número de los enteros, si prefieres comenzar por el número de los enteros, y si resta algo escríbelo en el lugar superior. Del mismo modo haz en los otros lugares y completarás la operación. Pero si no puedes, en alguna diferencia, sustraer el número inferior del número superpuesto, si éste está en el lugar de los enteros, trabajas inútilmente. Pues el que está arriba es menor. Pero en otro lugar se puede sustraer una unidad del orden superior próximo hacia el lugar los enteros, y la misma valdrá .60. en el lugar en donde debes hacer la sustracción. Luego, del número de donde debes restar y no puedes y del .60. añadido sustrae el que debes y escribe el resto en lugar del superior y tendrás el resultado. La razón es evidente y no es necesario poner un ejemplo.

Comentario. Explicación de la resta para las fracciones comunes: sigue la regla $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$.

Para las fracciones sexagesimales se puede comenzar por la izquierda o por la derecha y proceder al contrario, como ya es usual.

12. Se enseña la duplicación y dimidiación de fracciones tanto comunes como filosóficas.

Una fracción común se duplica doblando su numerador, como se evidencia por el segundo de estos teoremas, o dimidiando su denominador si es número par, como se evidencia por el quinto de estos teoremas. Pues cuatro tercios son el doble de cuatro sextos. Además la fracción común se dimidia doblando su denominador, como es evidente por el quinto de estos teoremas. Pues dos cuartos son la mitad de dos mitades. O dimidiado el numerador si es par. Si es impar, sustraída una unidad, dimidiarás el resto o bien, como dije, duplicarás el denominador, de tal modo que no haya error por omisión del resto.

En las fracciones filosóficas escribe el número de enteros doblado en lugar de ellos, lo que resulte en los otros lugares, si diera menos que .60. escríbelo. Si da .60. escribe en el lugar del número duplicado la cifra y darás una unidad al próximo lugar hacia los enteros. Si da más de .60. escribe en el lugar del duplicado cuanto sea el exceso y por .60. darás una unidad en el lugar próximo hacia los enteros. En la dimidiación, si en algún lugar hubiera un dígito impar, si el mismo es el primero de su lugar hacia la derecha, sustraída una unidad divide [por dos] el resto y por la mitad de la unidad darás .30. al lugar inmediato hacia la izquierda del lugar que sale de los enteros. Pero si en la diferencia ulterior de un lugar diera un dígito impar, sustraída la unidad, divídase por dos el resto y por la unidad dense .5. al dígito de la figura anterior. Por ejemplo, si quieres dimidiar .75. minutos, a partir de .5. dimidia .4. y pon .30 en lugar de los segundos, después sustrae una unidad de .7., dimidia .6. y da cinco a la mitad del cuaternario, y de este modo haz en los demás. La razón no tiene ninguna duda.

Comentario. Son reglas comunes a otros tratados.

13. De qué modo se procede para multiplicar fracciones comunes.

Corolario. Es evidente que las fracciones que tengan por numerador el producto del numerador de una y el numerador del otro número y como denominador aquel que es producto de un denominador por el [otro] denominador, se relacionan una a la otra fracción como el resto al entero.

Una fracción se multiplica por [otra] fracción si se multiplica el numerador por el numerador y el denominador por el denominador, pues entonces resultará una fracción que tiene como numerador el número producto del numerador [de una] por el numerador [de la otra] y por denominador el número que es producto de un denominador por el [otro] denominador.

Por ejemplo, sean dos fracciones. *ac*. y *.df*.; multiplíquese el numerador *.a*. por el numerador *.d*. y da *.b*.; multiplíquese el denominador *.c*. por el denominador *.f*. y da *.h*. Digo que de *.ac*. por *.df*. resulta la fracción *.bh*. Multiplíquese *.b*. numerador de la fracción *.bh*. por *.f*. denominador de la fracción *.df*. y resulta *.g*. De nuevo *.d*. numerador de la fracción *.df*. por *.h*. denominador de la fracción *.bf*. y da *.k*. Luego por el tercero de estos teoremas, la proporción de la fracción *.bh*. a la fracción *.df*. es igual a la proporción del número *.g*. con el número *.k*. Además multiplíquese *.a*. por *.d*. y resulta *.b*. y *.h*. por *.d*. y resulta *.k*. Luego la [proporción] que hay de *.a*. a *.h*. es la misma que hay de *.b*. a *.k*. porque la proporción entre los productores y los productos es la misma. Luego, permutando, la que hay entre *.a*. y *.b*. es igual a la que hay entre *.h*. y *.k*. Además [multiplíquese] *.b*. por *.f*. y da *.g*.; *.c*. por *.f*. y da *.h*. Luego la [proporción] que hay entre *.b*. y *.c*. es la igual a la que hay entre *.g*. y *.h*. Sea pues *.a*. el primero, *.b*. el segundo, *.c*. el tercero. Sea también *.g*. el primero, *.h*. el segundo, *.k*. el tercero. Luego ves que la proporción del primer *.a*. a *.b*. según un orden es la misma que de *.h*. segundo a *.k*. tercero en otro orden y la que hay de *.b*. segundo a *.c*. tercero es igual a la que hay de *.g*. primero a *.h*. segundo. Luego por la antepenúltima del Quinto de Euclides, la proporción de *.a*. a *.c*. es igual la proporción de *.g*. a *.k*. Luego la proporción de la fracción *.bh*. a la fracción *.df*. es igual a la proporción de *.a* . a *.c*. Luego, por el primero de estos teoremas, la proporción de la fracción *.bh*. la fracción .df. es igual a la proporción de la fracción *.ac*. al entero.

Luego, por la definición de qué es multiplicar una fracción por otra fracción, resulta lo buscado.

Pero si hay que multiplicar muchas fracciones por muchas [otras], redúzcanse tanto éstas como aquéllas a una sola denominación y agréguense tanto las multiplicadas por una cuanto las otras por una y con lo que de estas dos resulte haz del modo como se ha mostrado. Si resultan enteros con fracciones, reduce los enteros a fracciones y haz como sabes, si conoces lo anterior. Pues nada más queda por enseñar en la multiplicación de las [fracciones] comunes. Sin embargo observa que no se puede multiplicar una fracción por otra en forma común, si ambas no se toman respecto al mismo entero, es decir, salvo que ambas tengan numerador y denominador en relación al mismo entero. Por lo cual si son fracciones de diversos enteros, haz de un entero la fracción del otro. Entonces tendrás la fracción del entero ya resuelta y la fracción de su fracción. En la proposición siguiente se enseña cómo numerar y denominar la fracción de una fracción respecto al primer entero.

Comentario. La fuente es Euclides V-23: "Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón". Esta proposición expresa la propiedad conmutativa del producto de dos relaciones; y es posible generalizar el alcance de esta proposición a un número cualquiera de magnitudes.

Explica aquí la multiplicación de fracciones comunes según la regla $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Cuando los numeradores dados son enteros, la fracción mixta se transforma en un compuesto.

14. La parte de la parte es parte del todo numerada por el número que resulta del numerador por el numerador y denominada por el número que se produce por el denominador multiplicado por el denominador.

Por ejemplo. Sea una cierta cantidad respecto del entero, sea numerador .*a*. y denominador .*b*. Sea otra cantidad, numerador .*c*.

y denominador .*d*. respecto de la fracción .*ab*. Sea .*z*. el primer entero. Multiplíquese .*a*. por .*c*. y da .*f*. Póngase .*b*. por .*d*. y resulte .*g*. Digo que .*f*. numera y .*g*. denomina a la cantidad .*cd*. respecto al entero .*z*. Si no, tómese una cantidad mayor o menor que .*cd*. que sea numerador y denominador respecto al entero .*z*. Sea esta cantidad .*q*. Luego, resuélvase también .*a*. por .*d*. y resulta .*h*. Por lo supuesto y el primero de estos teoremas, es evidente que la proporción de la fracción .*ab*. al entero .*z*. es igual a la proporción del número .*a*. al .*b*. Del mismo modo, la proporción de la fracción .*cd*. a la fracción .*ab*. que es su entero, es igual a la proporción del número .*c*. al número .*d*. Pero .*c*. se relaciona a .*d*. como .*f*. a .*h*. porque de .*c*. por .*a*. resulta .*f*. [y] de .*d*. por .*a*. resulta .*h*. Luego la relación de la fracción .*cd*. a la cantidad .*ab*. es igual a la del número .*f*. al .*h*. Además, de .*a*. por .*d*. resulta .*h*.; de .*b*. por .*d*. resulta .*g*. Luego la relación entre .*a*. y .*b*. es la misma que entre .*h*. y .*g*. Luego también la que hay entre la fracción .*ab*. y el entero .*z*. es igual a la que hay entre .*h*. y .*g*. Luego la que hay entre .*f*. y .*g*. es igual a la que hay entre la cantidad .*cd*. y el entero .*z*. Pero se ha supuesto que .*f*. es numerador y .*g*. denominador de la cantidad .*q*. respecto al entro .*z*. Luego por el primero de estos teoremas, la relación entre .*f*. y .*g*. es la misma que entre la cantidad .*q*. y el entero .*z*. Pero es la misma que entre la cantidad .*cd*. y el entero .*z*. Luego la cantidad .*q*. es igual a la cantidad .*cd*. En consecuencia no es menor ni mayor. Por lo tanto es necesario que así como la fracción .*cd*. con respecto a la fracción .*ab*., .*f*. sea numerador y .*g*. denominador respecto al entero .*z*. Lo que se quería demostrar.

Comentario. Aquí "parte" tiene el significado de "fracción en general". El concepto de "parte" es importante en el libro V. Conforme a la definición 2, se supone que para cada magnitud hay un número indefinido de magnitudes iguales a ella ("La mayor es un múltiplo de la menor cuando es medida por la menor"). O sea: *x* es un *m*-múltiplo de *y* cuando mide *m* veces a *y*. Téngase en cuenta que para Euclides (especialmente en este libro) las magnitudes son abstracciones o idealizaciones de objetos geométricos (Vega, Introducción, cit. p. 74).

Fórmula: $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ A es $\frac{ac}{bd}$ de A

15. Si el numerador de una fracción filosófica se multiplica por sí mismo y el producto se pone como numerador de una fracción filosófica distante del primero tanto cuanto el primero del entero, es necesario que la fracción más cercana al entero sea proporcional a la otra y el entero con respecto al lugar medio.

Por ejemplo tómese cualquier fracción dada en terceros y sea .*a*. su numerador, que multiplicado por sí mismo da .*c*. Sea este número el numerador de una fracción filosófica en sextos. Pues el lugar de los sextos dista tanto de los tercios cuanto el lugar de los tercios del entero. Luego digo que la proporción de los sextos .*c*. a los tercios .*a.* es la misma que entre los tercios .*a.* y el entero. Pues hallo la denominación anterior a partir de la que los tercios tienen con respecto a los primeros enteros, ya que de estos se trata. Sea .*b*. este denominador y así como los terceros se denominan respecto a los enteros, así también los sextos respecto a los tercios, en razón de la igual distancia. Luego, conforme a [la proposición] anterior, multiplíquese .*b*. por .*b.* y resulte la denominación de los sextos a lo enteros, sea ella .*d*. Luego los sextos son la fracción .*cd*. Es evidente, por la operación de multiplicación de fracciones comunes, que la fracción .*ab*. es producida por la multiplicación de la fracción .*cd*. Luego la proporción que hay entre la fracción .*cd*. y la fracción .*ab*. es la misma que entre la fracción .*ab*. y el entero. Y por esto se evidencia lo propuesto. O así [otra prueba]: el número .*a*. es raíz del cuadrado .*c*. Del mismo modo el número .*b*. del cuadrado .*d.* Luego, por la 11.8 de Euclides, la proporción de .c. a .d. es igual a la proporción de .*a*. a .*b.* duplicada. Pero la que hay de .*c.* a .*d*. es igual a la que hay entre la fracción .*cd*. y el primer entero. Y la que hay entre .*a*. y *b*. es igual a la que hay entre la fracción .*ab*. y el entero. Luego, por la primera [proposición] de éstos, la proporción de la fracción .*cd*. al entero es la proporción de la fracción .*ab*. duplicada. Luego la proporción entre .*cd*. y .*ab*. es la misma que entre .*ab*. y el entero. De esto se puede inferir tu propósito ... [laguna del texto latino]. Infiere de esto lo que se propone.

Comentario. La fuente es Euclides VIII-11: "Entre dos números cuadrados hay un número que es media proporcional y el número cuadrado guarda con el número cuadrado una razón duplicada de la que el lado guarda con el lado" (según Nicómaco, es un teorema de Platón, cf. Puertas Castaños, cit. p. 80). Es un caso particular de la proposición 10 (Cf. G. Rietti, *Gli elementi*... cit, VII, p. 274) y su expresión es: si $a = c^2$ y $b = d^2$, existe entre a y b un medio proporcional (cd) y a está con b en la razón duplicada de c a d.

Fórmula: $\frac{a^2}{60^{2n}} : \frac{a}{60^n} = \frac{a}{60^n}\,{}^n : 1.$

16. Dadas dos fracciones filosóficas, si el numerador de una se multiplica por el numerador de la otra, resulta el numerador de una fracción filosófica distante de una de las dadas, tanto cuanto la otra [dista] del entero y estando en proporción a la otra de las dadas así como la restante al entero, sean las fracciones dadas del mismo lugar o de diversos. Nada difiere en cuanto a la denominación.

Sean como ejemplo las fracciones *.b.* tercera y *.a.* cuarta. Del producto de *.a.* por *.b.* resulta *.c.* Digo que la proporción de los séptimos *.c.* a los cuartos *.a.* es igual a la de los tercios *.b.* al entero. Sea *.d.* la denominación de los tercios al entero. Sea también *.f.* la denominación de los cuartos al entero. Es evidente que los séptimos respecto a los cuartos se denominan así como los terceros respecto a los enteros, en razón de la igual distancia. Luego *.d.* es la denominación de los séptimos respecto a los cuartos. Luego por la multiplicación de .f. por .d. resulta la denominación a los enteros por el [teorema] anterior al anterior. Sea aquella el número *.g*. Luego los séptimos *.c.* son la fracción *.cg*. Pero de la conversión *.bd*. en *.af*. resulta la fracción *.cg*. como es vidente por la operación de multiplicación de [fracciones] comunes. Y la proporción que hay entre la fracción *.cg*. y la fracción *.af*. es la misma que entre la fracción *.bd*. y el entero.

Comentario. Fórmula: Si $a_1.a_2$ son los numeradores de dos fracciones sexagesimales con denominadores 60^m, $\underline{60^n}$, resulta $\frac{a_1a_2}{60^{m+n}} : \frac{a_1}{60} = \frac{a_2}{60^n} : 1.$

17. Se propone cómo proceder en la multiplicación de facciones filosóficas.

Póngase en un orden la suma a multiplicar y la suma multiplicadora de tal modo que el primero, es decir, el lugar de los enteros del orden inferior esté debajo del último del superior. Después multiplica el numerador del último superior por el numerador del último inferior, y si el resultado es menor que .60. coloca en el lugar sobre el lugar de la fracción multiplicante. Si es .60. deja aquel lugar vacío y coloca una unidad en el lugar siguiente hacia los enteros. Si es mayor que .60., sustrae .60. tantas veces como puedas y si hay algún residuo colócalo encima de la fracción multiplicadora [?]. Y coloca en el lugar siguiente hacia los enteros tantas unidades, es decir, un número por unidad, tantas veces como sustrajiste .60. Del mismo modo haz en los demás.

Pero observa que si se dan enteros con fracciones, cuando se llega a las fracciones, antes de hacer algo con ellas deben reducirse los enteros a minutos y añadir a los minutos que había primero; o mejor se hace esto al comienzo de la operación. Luego, con los minutos, esto es fracciones próximas en el lugar de los enteros, multiplicarás los minutos de los enteros superpuestos hasta que no halles nada en el lugar de los enteros. Multiplica pues por cero la misma fracción superpuesta y resulta cero. Escribe esto en el lugar superpuesto borrando lo que primero había allí. Después pasa el lugar de los enteros del orden inferior bajo la fracción próxima hacia los enteros y los siguientes lugares y opera de modo que lo que exceda de la multiplicación de los numeradores por los numeradores lo añades a esos que resultaron en los lugares donde ellos mismos deben ponerse si resultaron de la anterior multiplicación que estaban puestos allí. Por tanto harás así hasta que se pongan los enteros bajo los enteros y hecha la operación será entero. Pero cuida de no omitir ningún lugar, sea en el orden superior o en el inferior.

Si quieres multiplicar minutos y segundos por cuartos y quintos, al poner más abajo no debes omitir el lugar de los enteros en el orden superior, aunque no deban ponerse enteros. Tampoco deben omitirse en el orden inferior el lugar de los tercios, segundos, minutos e íntegros. Pero aunque deban quedar vacíos deben sin embargo indicarse. Pues así como en la operación de enteros no debe omitirse la cifra, así tampoco aquí los lugares para que no pongas las fracciones en lugares no propios habiendo omitido los lugares precedentes.

Razón de esta operación. Quiero multiplicar por .*a*. cuartos y .*b*. minutos por .*f*. cuartos y .*g*. terceros y .*h*. minutos y .*k*. enteros. Entonces pongo el lugar de los enteros de orden bajo .*f*. y escribo lo que debe escribirse aquí sin omitir ningún lugar que deba estar antes de .*a*. o antes de .*f*. Después multiplico el numerador .*a*. por el numerador .*f*. y resulta el número .*c*. Lo pongo sobre .*a*. pues tanto distará .*c*. de .*f*. cuanto .*f*. de los enteros. Resulta por la próxima o la próxima a él que la fracción filosófica que en ese lugar numera .*c*. resulta del producto de la fracción filosófica que en su lugar numera .*a*. por la fracción filosófica que en su lugar numera .*f*. Si se intercambiaran los lugares vacíos y se pusiera .*a*. junto a .*b*. y .*g*. junto a .*h*. y .*f*. inmediatamente acontecería escribir .*c*. octavos en el lugar de los sextos. Pero como la multiplicación del numerador por el [otro] numerador produce más que .60., no escribo todo el numerador en el lugar de su fracción sino que de .60. hago un entero. Y así tantas veces como puedo sustraer .60. tantas unidades escribo en el lugar siguiente hacia los enteros. Aquí está todo claro.

Esta operación se hace más cómodamente si tanto la suma multiplicante como la multiplicada se aúnan en un lugar y después se multiplica el numerador por el [otro] numerador y lo que resulta numera la fracción filosófica tan distante de la otra de las sumas cuanto la restante [dista] de los enteros. Por ejemplo, si quieres multiplicar enteros, minutos, segundos y tercios haz -según al octavo de éstos- minutos de los enteros, segundos de los minutos y terceros de éstos. Si la suma multiplicante es de enteros, minutos y cuartos, reduce también esta suma a cuartos y entonces multiplica por cuartos los tercios, o al contrario, multiplicando el numerador por el [otro] numerador y el número que resulta lo pones en el lugar tan distante de la otra de las sumas cuanto la restante [diste] de los enteros, como por ejemplo en el lugar de los séptimos. Y si quieres saber cuánto hacen los séptimos resultantes, divide el numerador por .60. y el resultado será el número de los sextos. Y este número dividido a su vez por .60 dará el número de los quintos; y procede de este modo hasta que la división no pueda hacerse por .60. y sabrás cuánto hay en la suma procedente de la multiplicación. La razón es evidente.

Comentario. Para la multiplicación de fracciones sexagesimales Gernardo enseña dos procedimientos, de los cuales, el primer procedimiento, para los números enteros, ha sido reproducido; se considera también el número entero como el número de los minutos, segundos, etc. como las cifras sucesivas y según se hace cada multiplicación parcial, el número inferior se traslada hacia la izquierda. El otro procedimiento es el usual; se toma también la primera de las fracciones con sus minutos más bajos y se lleva luego la multiplicación de los números. Según Eneström, la transposición del multiplicador según se mueven a la izquierda, quizá es original de Gernardo.

18. Se explica de qué modo se divide una fracción vulgar por otra. Se hará evidente que la cantidad numerada por el número resultante en la división de los numeradores y la denominada por el número que resulta de la división de los denominadores se relaciona al entero como la fracción dividida a la divisora.

Resulte una fracción de la suma por la cual debe hacerse la división. Además una de aquellas sumas que debe dividirse, divide si puedes el numerador dividendo por el otro numerador y anota el número resultante. Divide también exactamente un denominador por el [otro] denominador, si puedes, y haz un todo. Entonces la cantidad será numerada por el número resultante en la división de los numeradores y denominada por el número que resulta en la división de los denominadores. Pues la misma se relaciona al entero como la fracción dividida al divisor. Sea por ejemplo *.cd*. una fracción dividida por la fracción *.ab*. y puedan dividirse exactamente *.c*. por *.a*. y resulte *.f*. Además *.d*. por *.b*. y resulte *.g*. Digo que la fracción *.fg*. se relaciona al entero como la fracción *.cd*. a la fracción *.ab*. Pues como del número *.c*. dividido por *.a*.

resulta .*f*. y del número .*d*. dividido por .*b*. resulta .*g*., es necesario que del producto de .*f*. por .*a*. resulte .*c*. y .*g*. multiplicado por .*b*. dé .*d*.; luego el producto de la fracción .*fg*. por la fracción .*ab*. da la fracción .*cd*. Luego según el corolario de la .13., la proporción de la fracción .*cd*. a la fracción .*ab*. es como la proporción de la fracción .*fg*. al entero. Luego la fracción .*fg*. resulta de la división de la fracción .*cd*. por la fracción .*ab*. Por la descripción de la división tienes lo propuesto.

Y observa que toda fracción es divisible exactamente por cualquier otra, pero no siempre en proporción del número. Pues muchas veces no puede dividirse exactamente un número por otro número porque algo sobra, [y] a veces no se puede porque el dividendo es menor. Entonces deben reducirse las fracciones a números tales que con ellos pueda hacerse la división. Para saber cómo hacer esto considera lo siguiente.

Comentario. Es un caso especial de la división de fracciones comunes.

Fórmula: cuando $a = hc$, $b = k, d$ entonces es:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{h}{k}$$

19. Dadas las fracciones, numerar y denominar de tal modo que los números de la fracción dividenda por los números de la otra se dividan sin resto. Pero aparecerá una fracción que resulta de la división de una fracción por otra numerada por el número que produce el numerante dividendo multiplicado por el denominador restante y denominado por el número que hace la denominación dividenda por el numerante del otro multiplicado.

Sean dadas las fracciones .*ab*. y .*cd*. y que no se pueda dividir .*c*. por .*a*. ni .*d*. por .*b*. Multiplico entonces los números de la fracción que se debe dividir entre sí, esto es .*a*. por .*b*. y resulta .*f*. Después multiplica .*f*. por .*c*. y resulta .*g*. y por .*d*. hace .*h*. Digo que la fracción *.gh.* es [igual a] la fracción *.cd.* y que *.g.* se divide exactamente por el número *.a.* de tal modo que el número producto de *.c.* por *.b.* sea *.k.* y que el número *.h.* se divida exactamente por *.b.*; el número resultante que produce *.d.* multiplicado por *.a.* llamémosle *.m.*

Como *.a.* por *.b.* da *.f.* es necesario que *.c.* sea la parte de *.f.* denominada por el número *.b.* Del mismo modo *.f.* es la parte de *.g.* denominada por *.c*. Luego, por el [teorema] .13. *.a.* es la parte de *.g.* denominada por el número *.k.* Luego el producto de *.a.* por *.k.* es *.g.* Luego *.g.* se divide exactamente por *.a.* [y] dará *.k.* Prueba del mismo modo que *.h.* se divide exactamente por *.b.* y dará el número *.m.* Luego de la división de la fracción *.cb.* o *.gh.* por la fracción *.ab.* resultará la fracción *.km.* Y aquí se ve lo propuesto.

Luego, tantas veces como se deba dividir una fracción por otra, multiplica el numerador dividendo por el otro denominador y el número resultante colócalo como numerador. Multiplica también el denominador dividendo por el numerador restante y lo que resulta colócalo de denominador y tendrás la fracción resultante. Si quieres dividir la fracción *.cd.* por la fracción *.ab.* multiplica *.c.* por *.b.* y resulta *.k.*; multiplica también *.d.* por *.a.* y resulta *.m.*; es necesario que la fracción *.km.* resulte de la división de la fracción *.cd.* por la fracción *.ab.* Pues la misma se relaciona al entero como la fracción *.ab.* a *.cd.* lo que puede verse bien por la tercera y la primera [proposición] de éstos. Y es lo que queríamos saber.

Comentario. División de las fracciones comunes (caso general).

Fórmula: regla

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{acd}{bcd}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}\,.$$

20. Dadas dos fracciones, si una se divide exactamente por la otra con los números propuestos, la divisora se relaciona a la dividente así como el resultado de los numeradores a los denominadores. /Segunda parte**/. Y si las fracciones dadas son desiguales, el resto de ellas es la fracción del todo denominada por la denominación dividida y numerada por el número que es resultado del numerador divisor por la diferencia de los dos resultados.**

Sean dadas las fracciones .*cd*. dividenda y .*ab*. divisora. Divídase .*c*. por .*a*. y resulta .*f*.; divídase .*d*. por .*b*. y resulta .*g*. y aquí nada resta. No se trata de probar que la fracción .*cd*. se relaciona a la fracción .*ab*. como la fracción .*fg*. al entero, pues esto es evidente. Luego consta por la primera [proposición] de estos, que .*cd*. se relaciona a .*ab*. como el número .*f*. al número .*g*. Pero sean desiguales las fracciones dadas. Luego los números .*f*. y .*g*. son desiguales y si .*f*. es mayor, la fracción .*cd*. es mayor y si es menor, también es menor la fracción .*cd*. Pongamos pues que .*h*. es la diferencia entre los números .*f*. y .*g*. Luego la fracción .*hg*. es la diferencia entre la fracción .*fg*. y el entero. Luego la fracción .*hg*. tomada en relación a la fracción .*ab*. es la diferencia de las fracciones .*cd*. y .*ab*. Pero por la proposición .13. de éstos, es evidente que la fracción .*hg*. de la fracción .*ab*. es numerada respecto al entero por el número que resulta de la multiplicación de .*k*. por .*a*. y se denomina por el número que resulta de la multiplicación de .*g*. por .*b*. Pero .*g*. por .*b*. da .*d*. porque dividido .*d*. por .*b*. resulta .*g*. Por tanto tienes lo propuesto. Y lo propuesto era que la diferencia de las fracciones .*ab*. y .*cd*. es la fracción del todo denominada por el número .*d*. y numerada por el número que resulta de la multiplicación de .*h*. por .*a*. y tienes esto. Luego tienes lo que debes tener.

Comentario. Se contemplan dos casos. Fórmulas:

1. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}$ (es como el Teorema 18).

2. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{c\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)}{b}$

21. Y si se consume todo el denominador pero no todo el numerador, entonces si los resultados son iguales la fracción dividida supera a la otra parte del entero denominada por la denominación dividida y numerada por el resto de la división de los numeradores. /Segunda parte/ **Y si el resultado de los numeradores es menor, la fracción dividente excede a la dividida en la parte del todo denominada por la denominación dividida y numerada por el número que es la diferencia del número en la división dejada y el número resultante de la diferencia por la fracción numeradora del dividente. /**Parte 3/ **En cambio si el resultado de los numeradores es mayor, dividido el exceso sobre la otra fracción del todo que denomina la denominación dividida y numera el número resultante de la adición del número por la división del resto a aquel que hace la diferencia de los resultados por la fracción numeradora del dividente.**

Agótese *.b.* dividiendo el todo *.d.* y resulte *.g.* Dividido *.c.* por *.a.* resulta *.f.* igual al número *.g.* y resta de la división el número *.h.* Digo que la fracción *.cd.* excede a la fracción *.ab.* en la parte del entero que denomina *.d.* y numera *.h.*. esto es, la fracción *.hd.*

Pues si *.a.* no se agota dividiendo todo *.c.* se agotará parte del número *.c.*, que será el número *.z.* Luego la fracción *.zd.* se divide exactamente por la fracción *.ab.* y resulta *.fg.* Luego la fracción *.zd.* y la fracción *.ab.* son iguales conforme a la primera parte del precedente, pero la fracción *.cd.* excede a la fracción *.zd.* en la fracción del todo que es *.hd.* porque el número *.c.* supera al numerador *.z.* en el número *.h.* Luego también la fracción *.cd.* supera a la fracción *.ab.* en la fracción *.hd.* como se propuso en la primera parte de la segunda parte.

Además, sea *.f.* menor que el número *.g.* Sea el número *.k.* la diferencia entre ellos. El cual, multiplicado por *.a.* da *.q.*, y sea *.t.*

la diferencia entre *.q.* y *k*. Digo que la fracción *.ab*. es mayor y excede a la fracción dividida *.cd*. en la fracción *.td*. tomada respecto al todo. Y esto así. El número *.c*. dividido por *.a*. se ha agotado, *.z.* y resta *.h*. y resultará *.f*. menor que el número *.g*. Luego la fracción *.zd*. es menor que la fracción *.ab*. y es excedida por la fracción *.qd*. según la segunda parte de la primera parte de éstos. Luego las fracciones *.zd*. y *.qd*. valen la fracción *.ab*. Además, el número *.h*. es menor que el número *.a.* porque *.c*. dividido por *.a*. da *.h*.; luego el número *.q*. que es resultado de la multiplicación de *.a*. por *.k*. es mayor que el número *.h.* Por lo tanto la fracción *.hd*. es menor que la fracción *.qd*. y por tanto la fracción .ab. es mayor que la fracción *.cd*. porque la fracción *.cd*. vale las fracciones *.zd*. y *.hd*. menores que las fracciones *.zd*. y *.qd*. que valen la fracción *.ad*. Pero la fracción *.qd*. excede a la fracción *.hd*. en la fracción *.tq*. Luego, añadidas en conjunto *.zd*. a las fracciones *.zd*. y *.qd*. que valen la fracción *.ab*. añaden *.td*. a la fracción sobre las fracciones *.zd*. y *.hd*. que valen la fracción *.cd*. De esto se tiene la segunda parte de esta segunda parte.

Además, sea *.f*. un número mayor que *.g*. Digo que la fracción *.cd*. añade sobre la fracción *.ab*. la fracción que denomina *.d*. y numera el número compuesto de los números *.q*. y *.h*. Y esto así. El número *.f*. es mayor que *.g*. luego la fracción *.zd*. es mayor que la fracción *.ab*. y añade sobre ella la fracción *.qd*. conforme a la segunda parte de la primera parte de la presente proposición.. Luego las fracciones *.ab*. y *.qd*. valen la fracción *.zd*.; pero las fracciones *.zd*. y *.hd*. valen la fracción *.cd*. Luego al fracción *.cd*. vale la tres fracciones, es decir, *.ab*., *.qd*. y *hd*. De esto se evidencia lo que propone la tercera parte de la segunda parte de esta 19ª [*sic* - proposición].

Pero si quieres saber acerca de dos fracciones cuál de un denominador no agota al otro denominador dividiendo, o si el numerador divide exactamente al [otro] numerador o no, si -digo- quieres saber acerca de tales fracciones, qué añade una sobre la otra, podrás conocer esto fácilmente por el cálculo presente, reduciendo las fracciones a la misma denominación, y entonces o el numerador divide exactamente al numerador o no, hallarás lo que preguntas por alguna de las partes de la presente proposición.

Comentario. Se contemplan tres casos. Fórmulas:

1. Cuando $a = mc + \beta\, (c > \beta > 0)$ y $b = md$,
entonces es $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{\beta}{b}$

2. Cuando $a = (m - \alpha)\, c + \beta\, (\alpha < m, c > \beta > 0)\ y\ b = md$, entonces es
$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{\beta c - \beta}{b}$

3. Cuando $\alpha = (m + \alpha)\, c + \beta\, (c > \beta > 0)$ siendo $b = md$
entonces es

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{\alpha c + \beta}{b}$$

22. Dividir enteros por enteros fraccionadamente.

La utilidad de esta operación es que sepas por ella cuánta proporción de enteros dados hay entre algunas cosas de los divisores igualmente en relación a una cualquiera de aquellas otras cosas en las cuales debe dividirse. Sea pues .*b*. el número de los enteros dividendos y sea el divisor, es decir el número numerador de la cosa en las cuales debe hacerse la división el número .*a.* Luego, o bien estos números son iguales y entonces no hay operación que hacer. O uno es menor que el otro. Sea .*b*. el número menor de los dividendos. Luego hago una fracción de alguno de los dividendos que numere .*b*. y denomínese el divisor .*a*. Digo entonces que en esta operación sale la fracción .*ba*. de alguno de los enteros dados si hay dados enteros de una clase y del mismo valor y cantidad. Pues de ellos se trata. Estos se relacionan al entero así como el número .*b*. dividendo a .*a*. divisor, conforme a la primera [proposición] de éstas. Y digo que si divides el entero .*b*. en partes así numeradas y denominadas tendrás tantas partes iguales cuantas son las unidades en el divisor, que es el número .*a*.

Si quieres reducir los enteros .*b*. a la fracción cuya denominación es .*a*. multiplico .*a*. por .*b.* y el número que resulta sea *.c.* que será el número numerador de la fracción denominada por *.a*. y ecuante así como enseña la prueba 8ª de éstos. Luego la fracción *.ca*. vale los enteros *.b*. Pero *.b*. multiplicado por *.a.* da *.c*. Luego cuantas veces está la unidad en *.a*. tantas veces están en *.b*. y *.c*. Luego por la segunda de éstos, también tantas veces está la fracción *.ba*. en la fracción *.ca*. que vale los enteros dados. Y así tienes lo propuesto cuando el número de los dividendos es menor.

En cambio si el número de los dividendos es mayor, es decir, el número *.b*. que el número *.a*., entonces si *.a.* divide exactamente a *.b*. es evidente que cualquier unidad *.a*. del divisor contiene tantos enteros cuantas son las unidades en el en el número resultante. Pero si queda algo en la división, sea *.d*. el número remanente y *.f*. el número resultante; hago entonces una fracción de alguno de los enteros dados que numera *.d*. y denomina *.a*. Y digo que cualquier unidad del divisor contienen el entero *.f.* y la fracción *.da*. de un entero. Sea entonces la parte del número *.b*. toda consumida por la división el número *.a*., resulta, digo, el número *.g*.; luego el número *.b*. constará de *.g*. y *.d.* Dividido *.g*. por *.a*. resulta *.f*., luego de los enteros *.g.* resultan los enteros *.f.* para cualquier unidad del divisor. Esto es evidente. Si divides los enteros *.d*. por *.a*. resulta en cualquier unidad del divisor la fracción *.da*. como se evidente al principio de la prueba presente. Por éstos ya sabes cuántos panes dados debes dividir en forma alícuota a tantos pobres. Luego adquiriste la ciencia común de operar en la división de las fracciones vulgares.

Pero atiende que a veces el conocimiento de la cosa que se busca en tal operación, tanto al multiplicar como al dividir, resulta impedida porque no se conoce la relación de una fracción a [otra] fracción, o porque es mucho el número denominador y lo mismo el número numerador, o porque la fracción tiene un denominador que el vulgo no entiende, como si dices cuatro octavos de denario el vulgo no conoce la fracción porque el denario no suele dividirse en octavos. Por lo tanto es útil la mayor denominación que pueda hacerse tanto al verter en la menor cuanto al conmutar la dada. De qué modo y cuándo se puede hacer se enseñará en las dos [proposiciones] siguientes.

Comentario. "División de fracciones" de números enteros, es decir, propiamente división con miembro residual en forma de fracción.

23. Reducir fracciones más sutiles /es decir, de mayor denominador/ **a más pesadas .**

Cuanto mayor es el denominar menor es la fracción y por tanto más sutil. Luego, dada una fracción de muchos numeradores y muchos denominadores muestro cómo se puede numerar y denominar a las menores. Y si se puede y de qué modo encontrar esos números. Sea entonces dada la fracción .*ab*., si los números .*a*. y .*b*. son primos entre sí la fracción dada no se numera y denomina por los menores. Si se puede hacer, denomínela [fig. 19] el número .*d*. menor que el número .*b*. y numérela el número .*c*. menor que el número .*a*. Luego la fracción .*ab*. es la fracción .*cd*. Luego, según la primera de éstos, la proporción de .*a*. a .*b*. es [igual a] la de .*c*. a .*d*. Luego .*a*. y .*b*. no son mínimos en su proporción. Pero los mismos son primos entre sí, como se ha supuesto. Luego, por el .22. del 7º de Euclides son mínimos en su proporción. Pero se había supuesto lo contrario.

Si los números dados son comunicantes entonces se puede hacer lo que se debe. Conoces por la primera del .7º. de Euclides que .*a*. y .*b*. son primos entre sí. Si no son primos entre sí son comunicantes. Luego encuentras por la segunda del .7º. el máximo de ambos numeradores. Es aquel máximo numerador de ambos que en una división tal como indica la primera del .7º. que debe hacerse, el primo consume el todo que divide. Sea pues .*c*. ese número. Divide entonces .*a*. por .*c*. y resulta .*d*. Después .*b*. por .*c*. y resulta .*f*. Digo que la fracción .*ab*. es la fracción .*df*. porque la proporción que hay de .*a*. a .*b*. es la que hay de .*d*. a *f*. Luego según la sexta de éstos, las fracciones son iguales. Pero es evidente que .*d*. es menor que .*a*. y que .*f*. es menor que el número .*b*. Tienes entonces lo propuesto así como se puede tener. Además, cuando los números de las fracciones son entre sí primos, haz lo que puedes; si puedes divide el numerador, si puedes en muchos números de los cuales cada uno o cualquiera sea comunicante de la denominación, como si las partes del número .*a*. fueran .*t*., .*x*. y .*z*.

comunicantes con el número *.b.*, podrías reducir las fracciones *.tb.*, *xb.* y *zb.* que valen *.ab.* a cualquiera de una denominación más pesada.

Comentario. La fuente del primer párrafo es Euclides VII-22: "Los números menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos son números primos entre sí". Si $\frac{a}{b}$ se reduce a sus mínimos términos, *a* y *b* son primos entre sí. Se demuestra por el absurdo. Según B. Levi, esta proposición supone que existe un par de números mínimos entre los que guardan una misma razón y/o que existe un par de números primos entre números entre los pares que guardan una misma razón (cf. Puertas Castaños, cit. p. 141).

Las fuentes del segundo párrafo son Euclides VII-1: "Dados dos números desiguales y restando sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede la unidad, los números iniciales serán primos entre sí" y VII-2: "Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima".

Al final advierte Gernardo, que cuando un corte directo no es posible, el número puede ser descompuesto, de tal modo que una suma de las fracciones parciales se mantenga con los denominadores menores.

24. Dada una fracción de un número dado, denominar en cuanto se pueda.

Pues esto no siempre se puede hacer, sino sólo cuando algún número se relaciona a un número dado como el número numerador de la fracción dada a su denominación. Sea entonces dada la fracción *.ab.* dado el número *.d.* Si quieres saber si algún número se relaciona a *.d.* como *.a.* a *.b.* y cuál si multiplicas *.a.* por *.d.* y resulta *.h.*, divide *.h.* por *.b.* y si todo *.h.* se agota, el número resultante -sea *.c.*- se relaciona a *.d.* como *.a.* a *.b.* Pues de *.c.* por *.b.* resulta *.h.* Sea entonces *.a.* primero, *.b.* segundo, *.c.* tercero, *.d.* cuarto. Procede así. Lo que resulta del primero por el cuarto es igual a lo que resulta del segundo por el tercero. Luego, por la .19. del .7º. [de Euclides] la proporción de *.a.* a *.b.* es como de *.c.* a *.d.* Luego hallado el número que se relaciona a la denominación dada *.d.*, como *.a.* a *.b.* -sea *.c.*- haz a este número numerador. Y digo que la fracción *.ab.* es la fracción *.cd.* Pues deduces esto de la sexta de éstos con sus premisas.

Pero si el número *.h.* no es agotado todo dividiendo por el número *.b.*, es imposible reducir la fracción *.ac.* a la denominación del número *.d.* Hágase si se puede y sea *.ab.* la fracción igual o la misma que la fracción *.kd.* Luego la [proporción] que hay de *.a.* a *.b.* es la que hay de *.k.* a *.d.* Luego el número que resulta de *.a.* por *.d.* resulta también de *.k.* por *.b.* Luego de la división exacta de *.h.* por *.b.* resulta *.k.* Pero se ha dicho que *.h.* por *.b.* no puede consumir el todo. Tienes entonces lo propuesto si se puede.

Comentario. La fuente es Euclides VII-19: "Si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero; y si el producto del primero y el cuarto es igual al producto del segundo y el tercero, los cuatro números serán proporcionales". Este enunciado supone la teoría de las proporciones del V. Señala G. Rietti que la desarrollan Campano y otros comentadores (*Gli alementi*... cit. VII, p. 125).

Fórmula: cuando $\frac{a}{b}$ es una fracción dada y d un denominador dado, es necesario que ad sea un múltiplo de b, se procede conforme a la regla $\frac{a}{b} = \frac{\frac{ad}{b}}{d}$.

25. Si el número procedente del número numerador de una fracción dada multiplicado por la denominación dada, es mayor que la denominación dada de la fracción dada, es igual a las dos que tienen la denominación dada, si una de ellas se denomina respecto al primer entero y es numerada por el número resultante de la división. La otra es numerada por el número restante en la división y denominada respecto a la

parte del primer entero denominado por el número que denomina a la fracción dada.

Sea por ejemplo la fracción *.ab.* y sea *.d.* la denominación dada. Multiplico *.a.* por *.d.* y resulta el número *.h.* mayor que el número *.b.* Divido entonces *.h.* por *.b.* y resulta *.c.* y resta *.z.* Digo que la fracción *.ab.* vale la fracción *.cd.* respecto de sus mismos enteros tomada respecto a lo que se toma *.ab.* y la fracción *.zd.* tomada respecto al entero *.b.*

Multiplica entonces *.a.* por *.b.* y resulta *.k.* Luego la fracción *.kb.* y la fracción *.hd.* son iguales. Porque la proporción que hay de *.h.* a *.d.* es la que hay de .k. a *.b.* Pero si dividiera el entero *.b.* la fracción *.hd.* según el modo de operar que se muestra en la [proposición] .20. de las presentes, entre cualquier unidad del número *.b.* caería *.cd.* y *.zd.* del entero *.b.* porque *.h.* dividido por *.b.* da *.c.* y resta *.z.* Luego si dividiera la fracción *.kb.* según ese modo por el entero *.b.* a cualquier unidad *.b.* cederían *.ab.* porque *.k.* por *.b.* da *.a.* Luego *.cd.* y *.zd.* del entero *.b.* se relacionan a *.hd.* así como *.ab.* a *.kb.* Luego así de algún modo queda reducida la fracción a la denominación dada, y esto es lo que se intentaba.

Comentario. Fórmula: Cuando $ad = mb + \alpha$ $(b > \alpha > 0)$ entonces:
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{d} + \frac{\alpha}{bd}.$$

26. Si el producto de la multiplicación es menor que la denominación dada de la fracción, la fracción dada es igual a la fracción numerada por el número producto de la multiplicación y por el número denominador, dada la fracción denominada respecto de una parte a la cual la denominación dada denomina en relación a un entero.

Por ejemplo, dada una fracción sea *.ab.* dada la denominación sea *.d.* de *.a.* por *.d.* resulta *.z.* número menor que el número *.b.* Digo que la fracción *.ab.* de un entero vale *.zb.* de *.d.* Multiplíquese pues *.d.* también por *.b.* y resulte *.q.* Luego, por el .13. de éstos, *.zb.* de *.d.*, es *.zq.* fracción de un entero. Pero *.d.*

multiplicado por *.a.* y da *.z.* También *.d.* por *.b.* da *.q.* Luego la proporción que hay de *.a.* a *.z.* es la misma que de *.b.* a *.q.* Luego por la sexta de éstos, las fracciones *.ab.* y *.zq.* son iguales porque están tomadas respecto al mismo entero. Por esto es claro que la fracción *.ab.* de un entero es igual a la fracción *.zb.* de *.d.* y así conoces qué puede hacer de *.ab.* un *.d.* como a la denominación dada.

Comentario. Fórmula: cuando $ad < b$, entonces es $\frac{a}{b} = \frac{ad}{b} = \frac{1}{d}$.

27. Modo de dividir a las [fracciones] filosóficas.

Haz así muy cómoda y ciertísimamente: reduce toda la suma dividenda a fracciones del último género de las fracciones dadas y del mismo modo la suma a dividir. Por ejemplo, si debes dividir una cifra con enteros, minutos, segundos y tercios, conforme a la .8ª. [proposición] de éstos, reduce estos enteros a minutos multiplicando por .60. Después multiplica el número de los minutos por .60. y convertirás los minutos en segundos. Haz así también tercios con los segundos. Del mismo modo debes operar en la suma divisora reduciéndolas a sus fracciones extremas, de modo que si debes dividir por enteros y segundos, haz segundos de toda la suma. Hecho esto divide el numerador dividendo de la fracción por el numerador de la fracción divisora. Considérese en primer lugar [el caso] que lo consume [sea exacta] Toma pues el número resultante y numera con él la fracción filosófica tan distante de los enteros cuanto la divisa de la dividenda. Pues la misma resulta de esta operación.

Por ejemplo. Quiero dividir los cuartos *.c.* por los minutos *.a.* Divido entonces el numerador por el numerador *.a.* y da *.b.* y no hay resto. Y como los cuartos distan de los minutos dos lugares internos, de nuevo digo que en la división resultan los tercios *.b.* Pues ellos distan de los enteros dos lugares intermedios. Si entonces multiplicara los minutos *.a.* por *.b.* resultaría *.c.* como se evidencia por la operación de multiplicación. Luego la proporción que hay de los cuartos *.c.* a los minutos *.a.* de la misma que entre los tercios *.b.* y el entero. Luego, de la división de los cuartos *.c.* por los minutos *.a.* resultan los tercios *.b.* que es lo que quise probar. Pero advierte que se debe obrar así cuando la fracción dividenda está más cerca de los enteros que la fracción divisa. Pues luego se dirá de qué modo se opera por remoción en la división de la fracción más cercana al lugar de los enteros.

Pero si en una división tal como la que dije hay algún resto, esto acontece cuando dividido el numerador de la fracción dividenda por el numerador restante queda algún resto. Entonces multiplicando por .60. el numerador de la fracción dividenda redúcela a fracciones tan remotas como a octavos o novenos, o si se trata de hacer una operación cuidadosa, incluso más, de modo que el numerador dividendo tanto más pueda ser dividido exactamente por el numerador de la fracción divisora. Pero si incluso resta algo, no te preocupes por la exigüidad de la fracción. Pues resulta un error insensible la omisión de pocos décimos o de algunos cercanos o más lejanos, pero siempre que el resultado de la operación quede colocado donde dije.

Si la fracción dividenda es más cercana a los enteros que la fracción divisora, transfiérela, es decir a la dividenda multiplicando por .60. su numerador hasta que diste tanto de los enteros cuanto quieras, y sea la fracción divisora entre ella y los enteros más cercana a los enteros. El ejemplo es claro y la razón es evidente.

Comentario. En la división de las fracciones sexagesimales, para llegar del modo más cómodo al resultado, cuando se toma la primera de las fracciones, con sus minutos más bajos, entonces los números de los dividendos se dividen por los números de los divisores.

28. Si fueran fracciones de enteros continuamente proporcionales los terceros desde los enteros serían cuadrados y continuando a cualquiera habiendo una intermedia. Del mismo modo los cuartos desde el entero serían cúbicos y a cualquiera seguirían dos intermedios.

Sea la proporción que hay del entero a la fracción *.a.* la que hay de la fracción *.a.* a la fracción *.b.* y de ésta a la fracción *.c.* Digo que tanto *.b.* tercera desde el entero cuanto *.d.* quinta desde el mismo es cuadrada. Multiplíquese por sí la fracción *.a.* y resulta la fracción *.f.* Luego *.f.* es cuadrada y es necesario que la proporción del entero a *.a.* sea como la proporción de *.a.* a *.f.* Luego *.f.* es *.b.* y así *.b.* es fracción cuadrada. Además la proporción que hay del entero a *.a.* es la que hay de *.b.* a *.c.* y la que hay de *.a.* a *.b.* es como la que hay de *.c.* a *.d.* Luego la que hay del entero a *.b.* es la que hay de *.b.* a *.d.* De esto se sigue que al modo que la fracción *.d.* es cuadrada tiene la fracción raíz *.b.* Y así tenemos la primera parte de lo propuesto. Además digo que la fracción *.c.* cuarta desde el entero es cúbica, y si a la fracción *.d.* le añado en proporcionalidad continua las fracciones *.g.* y *.h.* digo que la fracción *.h.* es cúbica. La proporción que hay de *.c.* a *.b.* es la que hay de *.a.* al entero. Luego del producto de .a. por *.b.* resulta *.c.* Luego de la multiplicación de la raíz *.a.* por su cuadrado la fracción *.b.* da *.c.* Luego *.c.* es cúbica. Pues esto es que algo se multiplique dos veces por sí y por el producto. Es evidente también que los números de la fracción *.c.* son cúbicos porque a ellos los producen los números de la fracción *.a.* de la fracción multiplicada por sí y por el producto, es decir los números de la fracción *.b.* multiplicados. Además la [proporción] de los enteros a *.b.* es la misma que de *.d.* a *.h.* y esto es evidente. Luego, de la multiplicación de *.b.* por *.d.* resulta *.h.* pero *.b.* es raíz de la fracción *.d.* Luego, como ya se ha dicho, es necesario que *.h.* sea una fracción cúbica. Y esto es lo propuesto en ambas partes.

Comentario. Cuando $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ...$ es una serie no ordenada de fracciones sexagesimales sencillas, y cuando $\alpha_1 : \alpha_2 = \alpha_2 : \alpha_3 = ...$, así es $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6 ....$ números cuadrados, y $\alpha_3, \alpha_6, \alpha_9 ...$ números cúbicos.

29. Dada una fracción, cuadrarla o mostrar que esto no se puede hacer. También, dada una fracción, reducirla a números cúbicos o demostrar que no es posible hacerlo.

Cuadrar una fracción es asignarle números cuadrados por los cuales se nomine y denomine. Sea dada la fracción *.cd.* Entonces verás así si es posible cuadrarla. Multiplica el numerador por el denominador y constata si el producto es cuadrado buscando su raíz. Pues si es cuadrado su raíz está en un lugar medio proporcional entre los números productores porque si el número al cual producen el primero y el tercero multiplicados por sí se hace del segundo multiplicado por sí, es necesario que haya la misma proporción entre el primero y el tercero que sea proporcional en un lugar medio. Luego si entre el numerador y el denominador cae algún número en un lugar medio proporcional digo que esa fracción se puede cuadrar.

Por ejemplo, la fracción dada es *.cd*. Sea entre .c. y *.d*. el número *.f.* en un lugar medio proporcional. Hago entonces de una fracción que numere *.f.* y denomine *.d.* denominador de la fracción *.cd*. Luego, por la segunda [proposición] de éstas, la proporción que hay de *.c*. a *.f*. es igual a la de la fracción *.cd*. a la fracción *.fd*. y entonces la relación que hay de *.f.* a *.d.* es igual a la de la fracción *.fd*. al entero conforme a la primera de éstos. Luego la fracción *.fd*. es raíz de la fracción *.cd*. Multiplico entonces *.f*. por sí y da *.h*. Además *.d*. por sí da *.x.* Luego la fracción *.hx*. se relaciona a la fracción *.fd*. así como se relaciona *.fd*. al entero. Luego *.cd*. es *.hx*. Lo que también puedes ver así: el número *.f.* está en un lugar medio proporcional entre *.c.* y *.d.* Luego de *.c*. por *.d*. se hace el cuadrado del número *.f.*, y resulta *.h*. Además de *.d*. por sí resulta el número *.x*.; luego la proporción que hay de *.c*. a *.d*. es la misma que *.d*. a *.x*. Luego la fracción *.cd*. es la fracción *.hx*. de acuerdo a la sexta de éstos. Pero *.h*. y *.x.* son números cuadrados, luego la fracción *.cd*. es cuadrada. O lo puedes hallar más cómodamente por la 33ª [proposición] del 7º [de Euclides]: tres números mínimos en proporcionalidad *.c*., *.f*. y *.d.* son los mismos *.h.*, *.z.* y *.q*. Luego por el corolario de la segunda del octavo [de Euclides] se tiene que *.h.* y *.q*. son cuadrados. Pero la proporción de ellos es como la de *.c*. a *.d*. Luego la fracción *.cd*. es cuadrada en los números *.h.* y *.q.*

Pero si entre el numerador y el denominador de la fracción dada no cae ningún número medio proporcional digo que la fracción dada no puede cuadrarse. Sea entonces que entre *.c*. y *.d.*

no haya ningún número en proporción y dígase que la fracción *.cd*. se puede cuadrar. Cuádrese entonces y sea el número *.h.* el cuadrado que la numera. Denomínela el número *.z.* igualmente cuadrado. Es evidente entonces por el segundo corolario del noveno de Euclides que *.h.* tetrágono multiplicado por el cuadrado *.z.* produce un cuadrado. Luego la raíz del producto está en un lugar medio proporcional entre *.h.* y *.z.*; pero la fracción *.hz*. es la fracción *.cd*. luego de acuerdo a la conversa de la sexta [proposición] de éstos, lo que es fácil ver, es necesario que la proporción de *.a*. a *.z.* sea como la de *.c*. a *.d*. Luego, como entre *.h*. y *.z*. cae un número que está en un lugar medio proporcional, es necesario, por la segunda del octavo de Euclides, que también entre *.c*. y *.d.* caiga algún número en el lugar medio proporcional. Pero se había supuesto lo contrario.

Otra prueba. Sea *.f.* en un lugar medio proporcional entre *.c*. y *.d.* Luego o *.c*., *.f.* y *.d*. son mínimos en su proporcionalidad o no. Si son mínimos entonces *.c.* y *.d.* son cuadrados por el segundo corolario del octavo, si no, por la misma segunda [proposición] los tres números mínimos de aquella proporcionalidad también serían cuadrados y tendrían la proporción *.c*. y *.d.* luego los mismos numeran y denominan la fracción *.cd*. y así la fracción dada es cuadrada. Pero si entre *.c*. y *.d*. no hay ningún número medio en proporción no se puede cuadrar la fracción dada.

Además, si quieres reducir una fracción dada a la forma cúbica verás primero si esto se puede hacer con tal procedimiento. Verás si entre el numerador y el denominador de la fracción dada hay dos números en proporcionalidad continua, eso tantas veces con tal cálculo, verás que es la proporción del numerador al denominador y por la 33ª del 7º de Euclides se llega a los números mínimos de la misma proporción. Hallados éstos, observa si uno de ellos no es cúbico o si los dos son cúbicos. Si uno no es cúbico consta que entre los números dados no se hallan dos números continuamente proporcionales. Sea *.ad*. la fracción dada y sean los números *.f.* y *.g*. mínimos según la proporción de los números *.a.* y *.d*. Luego, si *.f.* y *.g*. no son ambos cúbicos, no hay entre ellos dos números en proporcionalidad continua. Pues esto dice el corolario del segundo [teorema] del 8º de Euclides. En cambio si ambos son cúbicos es necesario que ya diga que hay entre ellos dos números de proporcionalidad continua. Luego por la octava del 8ª de Euclides, también entre *.a.* y *.d.* caen otros tantos números en proporcionalidad continua.

Si quieres saber qué números caen entre *.a.* y *.d.* mira primero qué números caen entre los cúbicos *.f.* y *.g.* Los hallarás así. Sea el número *.z.* cuadrado del cubo *.f.* y sea *.t.* la raíz de ambos números. Sea también el número *.q.* cuadrado del cubo *.g.* y sea el número *.s.* la raíz de ambos. Multiplíquese *.s.* por *.z.* y da *.h.*, además multiplíquese *.t.* por *.q.* y resulta *.x.* Digo que la proporción de *.f.* a *.h.* es como la de *.h.* a *.x.* y la de *.x.* a *.g.*

Prueba. De la multiplicación de *.t.* por *.z.* resulta *.f.* y la multiplicación de *.s.* por *.z.* da *.h.* Luego la [proporción] que hay entre *.t.* y *.s.* es la que hay entre *.f.* y *.h.* Además, de la multiplicación de *.t.* por *.s.* resulta *.x.*, y de *.s.* por *.q.* resulta *.g.* Luego la [proporción] que hay entre *.t.* y *.s.* es la que hay entre .x. y *.g.* Luego la [proporción] que hay entre *.f.* y *.h.* es la que hay entre .x. y *.g.* Que haya la misma proporción entre *.h.* y *.x.* lo pruebo así. De la multiplicación de .z. por *.t.* resulta *.f.*; de la multiplicación de *.q.* por *.t.* resulta *.x.* Luego la proporción que hay entre *.z.* y *.q.* es la que hay ente *.f.* y *.x.* Pero la proporción de *.z.* a *.q.*, puesto que ambos son cuadrados, es como la proporción de *.t.* a *.s.* duplicada. Pues sus raíces son *.t.* y *.s.* Luego la proporción de *.f.* a *.x.* es como la proporción de *.t.* a *.s.* duplicada. Luego también la proporción de *.f.* a *.x.* es como la proporción de *.f.* a *.h.* duplicada. Luego la proporción de *.f.* a *.h.* es como la proporción de *.h.* a *.x.* Obtenidos éstos, si quieres tener los números que caen entre *.a.* y *.d.* haz como digo. Es necesario, según la 33ª del 7º de Euclides, que como *.f.* y *.g.* son mínimos en su proporción y en esa misma están *.a.* y *.d.*, digo que es necesario que *.f.* numere a *.a.* y *.g.* numere a *.d.* según uno y el mismo número. Sea éste *.k.* Multiplíquese *.k.* por *.h.* y resulta *.b.* y del mismo modo por .x. y resulta *.c.* porque hay una [misma] proporción de múltiplos y submúltiplos, lo que es necesario para que la [proporción] que hay de *.f.* a *.h.* sea la misma que de *.a.* a *.b.*; y la que hay de *.h.* a *.x.* sea la misma que de *.b.* a *.c.* y la que hay entre *.x.* y *.g.* sea la que hay entre *.c.* y *.d.* Tienes entonces esto, pero quizá no te falte mucho.

Luego, para llegar a lo propuesto, si quieres reducir a números cúbicos una fracción dada, haz conforme al procedimiento que pone la primera del 7º [de Euclides] si *.a.* y *.d.* son primos entre sí. Pues si son primos entre sí son también mínimos en su proporción, conforme a la 33ª del 7º. Entonces si ambos son cubos tienes lo propuesto. Si uno de ellos no, trabajas en vano como se mostrará más abajo.

Pero si *.a.* y *.d.* no son mínimos en su proporción, una vez hallados los mínimos mira su ambos son cúbicos y entonces pon uno de numerador y el otro de denominador y convertirás en cúbica a la fracción dada, lo que es evidente por el 6º de estos. Pero si uno de los dos no es cúbicos no sirve de nada. Pues la fracción *.ad.* no es cúbica ni puede reducirse a números cúbicos. Pero si se puede, redúzcase también y numérela *.h.* y denomínela *.q.* ambos cúbicos. Luego la proporción que hay entre *.h.* y *.q.* es la que hay entre *.a.* y *.d.* Pero entre *.d.* y *.q.* hay dos números en proporcionalidad continua porque ambos son cúbicos. Luego también entre .a. y .d. Luego, hallados los mínimos del número en su proporcionalidad, los extremos serán cúbicos. Pero se había supuesto lo contrario.

Tienen entonces todo el trabajo propuesto cuya síntesis es ésta. Si entre el numerador y el denominador de la fracción dada cae algún número en un lugar medio proporcional, la fracción se cuadra en el primero y el tercero de los números en aquella proporcionalidad de los mínimos. Si no hay ninguno, la fracción ni es cuadrada ni puede cuadrarse. Además si entre el numerador y el denominador caen dos números en proporcionalidad continua, la fracción se hace cúbica en el primero y el cuarto de los números de aquella proporcionalidad de los mínimos. Si no hay dos, la fracción ni es cúbica ni puede hacerse cúbica. Lo que es evidente por las premisas. Y esto es lo que propusimos.

Comentario. Las fuentes son las siguientes: Euclides VII-33: "Dados tantos números como se quiera, hallar los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos"; VIII-2: "Hallar tantos números como uno proponga continuamente proporcionales, los menores en una razón dada" y Porisma (corolario): "A partir de esto queda claro que si tres números continuamente proporcionales son los menores de los que guardan la misma razón con ellos, sus extremos son cuadrados, y si son cuatro, son cubos"; IX-11 Porisma (corolario): "Y queda claro que aquel lugar que tenga el número que mide a partir de la unidad, el mismo lugar tiene también el número según el cual mide a partir del número medido en la dirección del número anterior a él"; VIII-8: "Si entre dos números caen números en proporción continua con ellos, entonces cuantos números como caigan entre ellos en proporción continua, tantos caerán también en proporción continua entre los que guardan la misma razón con los números iniciales"; VII-1: "Dados dos números desiguales y restado sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí".

El corolario de VIII-2 trata el caso: $n = 2,3$. Establece la identidad de la construcción de una proporción continua (progresión geométrica) con la elevación a potencia y en consecuencia la inserción de términos en una proporción de la cual se han dado los extremos, con la extracción de raíces. De aquí en más se puede exponer en lenguaje moderno (usando los signos de raíz y de potencia) los resultados que en el texto se expresan por medio de proporciones continuas (cf. G. Rietti, cit., p. 255). Con respecto al Corolario de IX-11, Arquímedes dice que si dos números en proporción continua a partid de la unidad se multiplican entre sí, el producto estará en la misma serie y su lugar a partir del factor mayor sería igual al lugar del factor menor a partir de la unidad, y distará de la unidad un lugar menos que la suma de los factores a partir de la unidad (cf. Puertas Castaño, cit., p. 213)

Fórmula; hacer una fracción cuadrada o cúbica, o sea, tomando la forma:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} \text{ ó } \frac{\alpha^3}{\beta^3}.$$

Palabra técnicas: *quadrare* , *ad cubicum numerum reducere*.

La regla es:

$\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ab^2}{b^3}$ y la condición es que *ab* es un número cuadrado o un número cúbico. En el texto aparece una vez la palabra *tetragonus* por *quadratus*.

30. Si una fracción filosófica es numerada en el lugar de los impares por un número cuadrado, es cuadrada. Lo que [sucede] si la fracción está en el cuarto lugar o en cualquiera de los siguientes. Si tiene un numerador cúbico entre dos lugares intermedios, es cúbica, pues son producidos por multiplicación en las denominaciones vulgares de la filosófica, es necesario llegar a las cúbicas desde los lugares impares cuadrados en las cuartas denominaciones.

Sea una fracción filosófica de lugar impar denominada por .*a*. número cuadrado. Digo que ella es cuadrada. Calcúlese la raíz del número .*a*., y sea .*b*. Pongo entonces .*b.* como numerador de la fracción de lugar intermedio entre el lugar de .*a.* y los enteros. Como del producto de .*b*. por sí resulta .*c*. es necesario, por la .14ª. de éstos, que la fracción filosófica numerada por .*b*. esté en un lugar medio proporcional entre la fracción filosófica numerada por .*a*. y el entero. Luego, del producto de la fracción filosófica que numera .*b*. por sí misma, resulta la fracción filosófica numerada por .*a.* Luego la fracción filosófica numerada por .*a*. es cuadrada. Lo cual verás también así. Sea .*c*. el denominador de la [fracción] filosófica, luego .*bc*. se denomina filosóficamente por el número .*c.* respecto del entero de las antepuestas fracciones próximas. Multiplica entonces el denominador filosófico .*c.* por sí mismo tanto cuanto se pueda, según la .13ª. de éstos, y resulte la denominación de la fracción vulgar .*bc*. Sea aquella el número .*z*. Pero por la distancia igual de los lugares es necesario que el número .*z*. que denomina a .*bc*. respecto del entero, denomine también a la fracción filosófica .*ac*. respecto de una fracción denominada por el número .*z*. respecto del primer entero. Luego por el .13º. de éstos, el número .*z*. multiplicado por sí produce la denominación. Pero el producto de .*bz*. por sí produce el numerador .*ac*. de la fracción filosófica respecto del entero. Sea .*x*. la denominación producida. Ves entonces que la fracción filosófica

.*a*. que es la fracción vulgar .*ax*. es cuadrada. Y ves también que el denominador vulgar, es decir .*x*. que aparece en el lugar de los impares es cuadrado. Es evidente entonces una parte de lo propuesto.

Además, sea el denominador filosófico el número .*c*. y numere a las fracciones filosóficas de cuarto lugar el número cúbico .*f*. Además, el que es cuarto del séptimo lugar numera a las fracciones filosóficas desde el cuarto del mismo modo, el cubo .*g*. Además, el que es cuarto del décimo lugar numera a algunas fracciones filosóficas desde el séptimo, el cubo .*h*. Digo que las fracciones .*fc*., .*gc*. y *hc*. son cúbicas. Pues tomando el entero .*c*. a partir del tercer lugar, consta que respecto de un segundo denomina el número .*c*. a la fracción filosófica .*fc*. Pero también denomina el número .*c*. un segundo respecto de un minuto y un minuto respecto de un primer entero. Luego por el .13. de éstos un segundo de un entero primero denomina al número resultado de .*c*. multiplicado por sí mismo. Sea aquel .*q*. Luego .*c*. denomina a la fracción filosófica .*fc*. y .*f*. la numera respecto a entero .*q*. Luego .*q*. y .*c*. multiplicado uno por el otro, resultando el número .*z*., denominará el número .*z*. a la fracción .*fc*. respecto al entero, según el .13. de éstos. Pero el número .*q*. es cuadrado de la raíz .*c*. Luego .z. es cúbico. Luego es verdad que en el cuarto lugar del cúbico se da la denominación y que la fracción filosófica .*fc*. que es la fracción vulgar .*fz*. es cúbica. Pruebo también que la fracción filosófica .*gc*. en .7º. lugar es cúbica, porque por la igual distancia se denomina así .*gc*. con respecto a .*z*. así como .*z*. respecto al entero. Luego la denominación de la fracción .gc. respecto a .*z*. es el número .*z*. Luego, por el .13. de éstos, el número .*z*. multiplicado por sí mismo produce el denominador de la fracción .*gz*. respecto del entero. Sea éste el número .*t*. Del producto de la unidad del numerador .*z*. por .*g*. se hace .*g*. Luego, por la [proposición] .13. de éstos, de a la fracción .*gz*. de un .*z*. desde el cuarto lugar, la numera el cubo .*g*. y la denomina .*t*. respecto al entero. Luego .*t*. es cúbico porque lo produce el cubo .*z*. multiplicado por sí. Pues el producto de un cubo por un cubo produce un cubo, conforme a la cuarta [proposición] del noveno de Euclides. Luego en .7º. lugar hallas lo propuesto. Muestro además que en el décimo lugar se da la denominación vulgar cúbica y que la fracción filosófica *.hc.* de aquel lugar es cúbica, puesto que *.h.* es número cúbico. Denomine entonces *.hc.* la fracción respecto de un *.t.* así como un *.t.* respecto de un *.z.* puestos en el cuarto lugar. Luego el número *.z.* es la denominación de ésta. Multiplíquese entonces la unidad un *.t.* respecto del entero numerador por *.h.* y quedará *.h.* Multiplíquese también *.t.* por *.s.* y resulta *.k.* Luego por el .13. de éstos, *.hz.* de un *.t.* es *.hk.* de un entero. Pero *.k.* es número cúbico, conforme a la tercera del noveno [de Euclides], porque es el producto del cubo *.t.* por el cubo *.z.* Tienes entonces todo lo propuesto. Pues según alguna de estas formas se prueba lo propuesto de modo que no haya una falsa solución.

Comentario. Las fuentes son Euclides IX-4: "Si un número cubo, al multiplicar a un número cubo, hace algún número, el producto será cubo"; IX-3: "Si un número cubo, al multiplicarse por sí mismo, hace algún número, el producto será cubo". Las definiciones de número cuadrado y cubo son la 19; "Un número cuadrado es el multiplicado por sí mismo o el comprendido por dos números iguales" y la 20: "Un número cubo es el multiplicado dos veces por sí mismo o el comprendido por tres números iguales".

Gernardo asume que cuando una fracción con el denominador 60^{2n} tiene un numerador cuadrado, es fracción cuadrada, y asimismo es cúbica cuando el denominador es 60^{3n} y el numerador es cúbico.

Cuando una fracción decimal con el denominador 60^{2n} tiene un número cuadrado, es fracción cuadrática, y asimismo es cúbica cuando el denominador 60^{3n} y el número es cúbico.

31. Reducir una fracción dada a una denominación cuadrada o cúbica.

Sea dada la fracción *.ab.* de la cual quiero en primer lugar hallar la denominación cuadrada. Multiplico entonces el denominador *.b.* por sí y resulta el número *.d.* Multiplico a su vez *.a.* por *.b.* y resulta el número *.c.* Digo entonces que la fracción *.ab.* es *.cd.* que tiene *.d.* denominación cuadrado. Pues multiplicando *.a.* por *.b.* resulta *.c.* y también *.b.* por *.b.* da *.d.* Luego la [proporción] que hay de *.a.* a *.b.* es la misma que de *.c.* a *.d.* Luego, por la sexta de éstos, la fracción *.ab.* es la fracción *.cd.* Tienes pues una parte de lo propuesto.

Para reducir una fracción dada a una denominación cúbica, sea *.ab.* la fracción dada. Multiplíquese entonces el denominador *.b.* por sí y resulta *.d.* Después se multiplica *.a.* por *.d.* y da *.t.* De nuevo *.b.* por *.d.* y da *.z.* Luego la proporción de *.a.* y *.b.* de los multiplicados igualmente por el número *.d.* es la que hay de *.t.* a *.z.* que producen los números por multiplicación. Y así la fracción *.ab.* es la fracción *.tz.* Pero *.z.* es número cúbico porque es el producto de la raíz .b. por *.d.* su cuadrado. Tienes entonces todo lo que propuse.

Comentario. Una fracción dada tiene denominador cuadrado o cúbico. Este teorema es propiamente superfluo, pues el método para proceder puede verse en el comienzo del Teorema 29.

32. Extraer la raíz de una fracción vulgar.

Sea dada la fracción *.ab.*, luego primero verás por el procedimiento del .30. de éstos, si es cuadrable. Primero determino acerca de la raíz de la fracción cuadrada y si es cuadrable. Y busco la raíz del numerador y del mismo modo del denominador y hago la fracción raíz. Si no es cuadrable tampoco es cuadrada. Pues no puede tener una raíz exata; pero harás como se hace en los números. Es decir, buscas la raíz de aquella fracción cuadrada menor que la fracción dada a la cual añadido lo que resta en la operación dará el aumento a la fracción dada.

Por ejemplo. Dada la fracción *.ab.* si no tiene denominador cuadrado haz un denominador cuadrado por aproximación. Pero veas de no trabajar en vano. Luego toma la raíz del cuadrado *.b.* y resulta *.d.*, después toma cuanto puedas más aproximado a la raíz del numerador *.a.* y sea esto el número *.c.*, y resta de la operación con el número *.a.* el número *.z.* Además multiplica *.c.* por sí y resulta el número *.t.* Multiplica *.d.* por sí y se produce *.b.* Digo entonces que *.cd.* es la raíz de la fracción *.tb.* Esto es evidente. Y que la fracción .*tb*. excede a la fracción .*ab*. en la fracción .*zb*. que resta de la operación. Pues cuando busqué la raíz del número .*a*. encontré .*c*. y restó .*z*. Pero del producto de .*c*. por sí resulta .*t*. Luego .*t*. y .*z*. valen el número .*a*. Pero la [proporción] que hay de .*t*. y .*z*. a .*a*. es la misma proporción de las fracciones .*tb*. y .*zb*. a .*ab*., por la secunda de éstos. Luego por esto tienes lo que propuse.

Y observa que si ni .*a*. ni .*b*. son cuadrados y quieres buscar la raíz de esos números, acercándote cuanto más puedas, te equivocarás. Pues sucederá que hallada la raíz y multiplicada ella por sí tampoco resultará que la fracción proveniente [sea] cuadrada y la fracción resto en la operación es aquella que numera el residuo del numerador y denomina el residuo del denominador igual a a la fracción dada. Por ejemplo, sean dados $\frac{6}{8}$ en los cuales operando hallo la raíz de dos mitades y consumen .4. del numerador y restan dos. También se consumen de modo semejante .4. del denominador y restarán .4. Luego restan de la operación o $\frac{2}{4}$ o $\frac{2}{8}$. Pero como multipliqué por sí la raíz $\frac{2}{2}$, es decir $\frac{4}{4}$, resultará que son $\frac{8}{8}$ a los cuales si añadieras o dos cuartos o dos octavos [el resultado] será mucho más que seis octavos. Luego para evitar este error es necesario que si la fracción dada no se puede cuadrar, hay que reducir a menos a la denominación cuadrada.

Ahora quiero hallar la raíz cúbica de una fracción vulgar. Sea dada la fracción .*tz*. que si puede reducirse a números cúbicos, lo que enseña a ver la próxima de la próxima, se hace esto y hallada la raíz cúbica de ambos será hallada la raíz de la fracción dada. Pero si no se puede, se da sin embargo la denominación cúbica si no la tiene. Cómo hacer esto fácilmente se ve por lo ya dicho. Sea que tenga y sea .*z*. el número cúbico. Sea su raíz el número .*f*. Se busca entonces la raíz del número .*t*. lo más aproximada y sea .*x*. que multiplicado cúbicamente por sí consume el número .*b*. del número .*t*. y resta el número .*c*. Digo que la raíz .*xf*. multiplicada por sí cúbicamente produce la fracción .*bz*. puesto que la fracción .*cz*. es la fracción ecuante .*tz*. dada. Pues .*f*. multiplicado cúbicamente por sí produce *.z.* pero *.x.* produce *.b.* y restaría en la operación el número *.c.* Luego la fracción *.xf.* es la raíz de la fracción cúbica *.bz.* Se sigue entonces de lo dicho que *.c.* y *.b.* valen *.t.* Luego también *.cz.* y *.bz.* valen la fracción *.tz.* Tienes entonces que la raíz hallada produce la fracción cúbica que es su residuo, esto es, como la fracción *.cz.* perfecciona a la fracción dada *.tz.* no tiene raíz exacta en las fracciones que tienen números. Luego ves el modo de operar en esto y es clara la razón de la operación. Luego se ha mostrado lo propuesto.

Comentario. Fórmulas: Extracción de la raíz cuadrada y cúbica para las fracciones comunes conforme a las reglas

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$.

Gernardo enseña mediante un ejemplo, que cuando ni a ni b es un número cuadrado se calcula tanto como para $\sqrt{a}$ así para $\sqrt{b}$ y entonces se coloca $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

33. Hallar la raíz de las fracciones filosóficas.

Sea que se den enteros con minutos o solamente fracciones, reduce la suma dada a fracciones de un [solo] género. Pero siempre se reducen a un lugar impar. Si buscas la raíz de la fracción cuadrada allí hallas la denominación cuadrada. Luego buscarás la raíz exacta -o cuanto más exacta puedas- del numerador y la pones en medio entre la fracción y el entero principal Y la fracción así numerada allí es la raíz buscada.

Por ejemplo. Reduzco la suma dada a cuartos que están en quinto lugar y sea *.a.* la fracción allí hecha. Luego busco la raíz del numerador *.a.* así como se suele buscar la raíz del cuadrado en los números. Busco la raíz *.b.* y sea primeramente el número *.a.* todo consumido Pongo luego el número de modo que numere a los segundos puestos en tercer lugar y el lugar del medio tiene entre los cuartos y los enteros. Digo así que los segundos *.b.* son la raíz exacta de los cuartos *.a.*

Prueba. Denomine el número *.z.* a los segundos respecto de los enteros. Luego lo mismo *.a.* denominará a los cuartos respecto de los segundos. Luego el número *.z.* multiplicado por sí produce la denominación *.a.* de los cuartos respecto de los enteros. Luego el número *.z.* es la raíz de la denominación cuadrada que tienen los cuartos *.a.* con respecto a los enteros; pero *.b.* es la raíz del numerador *.a.* Luego la fracción *.bz.* es la raíz de los cuartos *.a.* que es equipolente al número propuesto. Sea de modo que el número *.b.* no sea raíz exacta sino aproximada del numerador *.a.* y consuma de *.a.* el número *.q.* y resta el número *.s.* Digo que los segundos *.b.* son raíz de los cuartos *.q.* Pues es evidente que restan de la operación los cuartos *.s.* que añadidos a los cuartos *.q.* dan por resultado los cuartos *.a.* Pues *.q.* y *.s.* valen *.a.* Esto es claro porque los cuartos *.q.* y los cuartos *.s.* valen los cuartos *.a.* Luego la operación de hallar la raíz cuadrada de una fracción filosófica es evidente.

Queda por tratar la extracción de la raíz de una fracción filosófica cúbica. Entonces, cuando pienses, a una suma dada a alguno de los cuartos lugares, por ejemplo, al cuarto o séptimo o décimo o alguno semejante, busca la raíz cúbica del numerador. Y dónde debe ponerse la raíz hallada lo verás así. Hay dos lugares entre cualquiera de los cuartos lugares y el lugar de los enteros, relacionados en posición que desde los enteros al otro de ellos y desde aquel al restante y desde ese de nuevo al cuarto lugar dado hay una y la misma distancia. Entonces en ese lugar que de los dos dados es más cercano a los enteros pones la raíz. Y la fracción así numerada por la raíz es la raíz exacta de la suma dada, si el numerador cuya raíz se buscaba ha consumido el todo. Si no [lo consume] todo, aquella raíz es la raíz de la fracción cúbica a la cual añadida la fracción que numera en el cuarto lugar dado el número restante en la operación, completa la fracción dada.

Por ejemplo. Reduzco la suma dada al lugar séptimo y sea allí el número *.b.* del cual su raíz cúbica sea el número *.c.* y sea primeramente su raíz exacta. Entonces pongo *.c.* como numerador de los segundos en el tercer lugar. Y digo que los segundos *.c*. son la raíz cúbica de los sextos *.b*. cuyo lugar es el séptimo desde los enteros.

Prueba. Del producto de *.c.* por sí resulta *.z*.; luego del producto de los segundos *.c*. por sí resultan los cuartos *.z*. conforme a la [proposición] .14. de éstos. Luego los cuartos *.z*. son una fracción cuadrada. Pero del producto de *.c*. por *.z.* resulta *.b*., porque *.c*. es un cubo cuya raíz es *.c*. que duplica al número *.z*., es necesario que el cubo *.b*. resulte del producto de su raíz *.c*. por su cuadrado *.z.* Luego por el .15. de éstos, del producto de los segundos *.c*. por los cuartos *.z*. resultan los sextos *.b*. Luego es necesario que los sextos *.b*. sean una fracción cúbica porque resultan del producto de la raíz por su cuadrado. Pues los segundos *.c.* son raíz de los cuartos *.z.* Sea de modo que *.c*. no es la raíz exacta del número cúbico *.b*. pero multiplicado cúbicamente por sí consumen *.k*. y resta *.t*. Digo que los segundos *.c*. son la raíz cúbica de los sextos *.k.* Esto se prueba del modo como se ha procedido y que los sextos *.t*. que restaron de la operación con los sextos *.k*. hacen los sextos *.b*. De esto no hay duda, pues el número *.k*. y el *.t*. valen el número *.b*. Luego los sextos *.k.* y los sextos *.t.* hacen los sextos *.b*. Así tienes esta operación con su explicación.

Comentario. Extracción de raíz cuadrada y cúbica de fracciones sexagesimales. Se toma una fracción dada con un denominador de la forma 60^{2n} ó 60^{2n}.

34. De dos cuadrados próximos el mayor añade al menor el número compuesto de las raíces sumadas de ambos.

Sean *.a*. y *.b*. dos los cuadrados próximos. Y sea el número *.z*. raíz cuadrada de *.a*. y *.x*. raíz cuadrada de *.b.* Y pongo que *.b*. es mayor. Digo que el número *.b*. vale los números *.a*., *.z*. y *.x*. Como *.b*. es próximo al cuadrado mayor que el cuadrado *.a*. es necesario que *.c*., raíz del mayor, sea en una unidad mayor que la raíz *.z*. Luego es lo mismo multiplicar *.x*. por sí que multiplicar *.z.* y la unidad por sí y la unidad. Multiplicando *.z*. por sí y la unidad resulta *.a.* con *.z.* Multiplicada la unidad por sí y *.z.* resulta *.x.* Luego multiplicando *.x.* por sí resultan *.a.*, *.z.* y *.x.* Luego estos números valen el cuadrado *.b*. Es claro lo propuesto.

Comentario. Fórmula: $(a + 1)^2 = a^2 + a + (a +1)$.

35. Todo cubo añade sobre el cubo próximo menor el número cubo resultado de los cuadrados de ambos y el número resultado del producto de la raíz de uno por la raíz del otro.

Por ejemplo, sean dos cubos próximos, el mayor *.x.* y el menor *.z.*, [sea] *.b*. la raíz del mayor y *.a*. la raíz del menor. Es evidente que el número *.b*. tiene sobre *.a.* a la unidad. Sea el cuadrado *.x.* y *.c.* un número cúbico cuadrado del otro número *.d*. Digo que el cubo *.x*. es mayor que el número cúbico *.z*. que se obtiene de *.c*. y *.d*. y el número que resulta del producto de *.a*. por *.b.* que es *.s.* Pues *.x*. resulta de *.a*. y la unidad multiplicados por *.c*. Pero de uno por *.c*. resulta *.c.*; de *.a*. por *.c*. resulta el número cúbico *.a*. y el cuadrado suyo *.d*. y *.s*. así como probaré. Pues es lo mismo multiplicar *.a*. por *.c*. y multiplicar *.b*. por *.a*. y por el producto, según la .37. precedente [*sic*]. Luego lo mismo resulta de *.a.* por *.c*. que de *.b*. por *.s*. Luego también lo mismo resulta de uno y *.a*. por *.s*. pero de uno por *.s.* resulta *.s*. Observa entonces y verás que de *.b.* por *.c*. resulta *.c.* y *.s.* y esto que resulta del producto de *.a.* por *.s*. pero multiplicando *.a.* por *.s.* saco por equipolencia *.a*. por *.b*. y por el producto, luego multiplico *.a*. por *.a*. y por la unidad y por el producto. Pero multiplicando *.a*. por la unidad y por el producto produzco *.d*. y multiplicando *.a*. por *.a*. y por el producto hago el cubo *.z*. del número *.a*. Luego de *.b.* por *.c*. resultan *.c*. y *.d*., y *.s.* y *.z*. Pues de estos consta *.x*. Luego añade sobre el cubo *.z.* menor que los cuadrados *.c*. *.d*. y el número *.s*. resultado del producto de la raíz de uno por la raíz del otro; y esto es lo que había que demostrar.

Comentario. Fórmula: $(a + 1)^3 = a^3 + a^2 + (a +1)^2 + a (a +1)$.

36. Si un cuadrado se multiplica por un no cuadrado y se añade el no cuadrado al cuadrado máximo suyo, no menos se

produce de su raíz por multiplicación un número no cuadrado que tiene un cuadrado mayor que el cuadrado que resultó del primer cuadrado por el máximo cuadrado del primero no cuadrado multiplicado. / Glosa La primera parte tiene aplicación solo en el cuaternario. Parte segunda/ **Si en cambio el no cuadrado se añade sobre su máximo cuadrado menos su raíz, entonces si algún cuadrado multiplicado por un no cuadrado y después por el producto, y el mismo por el producto y del mismo modo se hacen tantas multiplicaciones cuantas veces contiene el exceso del no cuadrado sobre su máximo cuadrado su raíz, entonces es necesario a la vez que al menos en la última multiplicación resulte un no cuadrado, cuyo máximo cuadrado sea mayor que aquel que resulta del producto del primer cuadrado por el máximo cuadrado del no cuadrado producido en la penúltima multiplicación.** / Glosa. Que del producto del cuadrado por el cuadrado resulta un cuadrado y del producto por un no cuadrado o a la inversa resulta un no cuadrado, lo dice el segundo corolario del noveno de Euclides.

La parte primera tiene aplicación solo en el cuaternario. Pues en todos los cuadrados mayores en relación a tal multiplicación es necesario asumir lo que se dice. Por ejemplo, sea dado el cuadrado .*a*.; sea .*b*. un número no cuadrado del cual su máximo cuadrado sea .*c*. que tenga raíz .*z*.; exceda el número .*b*. al número .*c*. en el número .*t*. no menor que el número .*z*. Digo que del producto de .*a*. por .*b*. resulta un no cuadrado que tiene como máximo un cuadrado mayor que aquel que resulta del producto de .*a*. por .*c*. Sea entonces el producto de .*a*. por .*b*. el número .*q*. y el producto de .*a*. por .*t*. el número .*h*., de .*a*. por .*c*. el cuadrado .*k*. Luego el número .*q*. consta de .*h*. y .*k*. Digo que el número .*q*. es un cuadrado mayor que el número .*k*. Digo también que .*a*. no es cuaternario sino mayor.

Sea el número .*m*. la raíz del cuadrado .*a*., y el número .*s*. la raíz del cuadrado .*k*.; como del producto de .*a*. por .*c*. resulta .*k*. y es necesario que su raíz, que es este número .*s*. sea lugar medio proporcional entre .*a*. y .*c*. De lo cual se sigue que el número .*s*. resulta del producto de .*m*. por .*s*. lo que se puede ver así. Del producto de *.m.* por *.m.* resulta *.a.*; del de *.m.* por *.z.* resulta *.y.* Luego la [proporción] que hay entre *.m.* y *.z.* es la misma que entre *.a.* y *.y.* Además, del producto de *.m.* por *.z.* resulta *.y.* pero de *.z.* por *.z.* resulta *.c.* Luego la [proporción] que hay entre *.m.* y *.z.* es la misma que entre *.y.* y *.c.* Luego la [proporción] que hay entre *.a.* y *.y.* es la misma que entre *.y.* y *.c.* Luego *.y.* es [igual a] *.s.* Luego el número *.s.* resulta del producto de *.m.* por *.z.*, pero de *.a.* por *.t.* resulta *.h.* Como *.t.* no hace menos el número *.z.* y el cuadrado *.a.*, hace al menos el triple en relación a *.m.* su raíz, es necesario que el número *.h.* sea al menos triple con respecto a *.s.* Luego el número *.q.* añade sobre el cuadrado *.k.* más el número que resulta de la raíz *.s.* y próxima a la raíz del mayor. Se tiene igualmente el número *.q.* cuadrado mayor que el número *.k.* por la [proposición] .30. Tienes así lo propuesto si *.a.* no es cuaternario.

Pero si *.a.* es cuaternario no es necesario que siempre suceda lo que se dice. Sea pues *.a.* cuaternario y sea *.t.* igual al número *.z.*, entonces no resulta lo propuesto. Porque entonces de *.a.* por *.t.* resulta el doble de *.s.* De donde *.q.* añade sobre *.k.* un número doble del número *.s.*; pero el cuadrado próximo mayor al cuadrado *.k.* le añade el doble del número *.s.* y la unidad. Pero si *.a.* es cuaternario y *.t.* es un número igual a la raíz *.z.* entonces multiplicados *.a.* por *.q.* resulta un número no cuadrado teniendo un cuadrado mayor que el cuadrado *.k.* máximo en el número *.q.* Si *.t.* es, o una unidad mayor que el número .s. resulta lo propuesto, o si *.a.* es cuaternario o cuadrado mayor así, como es claro si se atiende. Luego ésta es la primera parte de la proposición propuesta aquí.

Sea de modo que *.t.* sea un número menor que el número *.z.*, y sea a *.t.* un número séxtuplo número *.z.* y multiplíquese .a. por *.tc.*, resultando *.hk.*, en este producto .a. produce *.fg.* También multiplíquese por esto y resulte *.AB.* También [multiplíquese] por esto y resulte *.CD.* que multiplicado por *.a.* da *.EF.* y multiplicado por éste resulta *.GH.* Sea *.g.* el cuadrado producto de *.a.* por *.k.*; de *.a.* por *.g.* resulte *.B.*, de *.a.* por *B.* resulte *.D.*, de *.a.* por *.D.* resulte *.F.*, de *A.* por *.F.* resulta *.H.* Luego es necesario que de *.a.* por *.t.* resulte *.h.*, de *.a.* por *.h.* resulte *.f.*, de *.a.* por *.f.* resulte .A., de .a.

por *.A.* resulte *.c.* de *.a.* por *.c.* resulte *.E.*, de *.a.* por *.z.* resulte *.G.* Digo entonces que al menos en el número *.GH.* y el cuadrado [es] mayor que el cuadrado *.H.* En uno sucede lo que busco, porque como de *.a.* por *.c.* resulta *.k.*, es necesario que de *.m.* por *.z.* resulte *.s.* Pero de *.a.* por *.z.* resulta *.l.* Luego, la [proporción] que hay entre *.z.* y *.t.* es la que hay entre *.l.* y *.h.* Luego la proporción de *.l.* a *.h.* es séxtupla. Pero de *.m.* por *.z.* resulta *.s.*, luego como de *.a.* por *.z.* resulta *.l.*, la proporción entre *.l.* y *.s.* es la que hay de *.a.* a *.m.* Pero la proporción de *.a.* a *.m.* es alo menos doble en relación, por ejemplo si *.a.* es cuaternario. Luego *.l.* es número al séxtuplo *.h.* al menos doble a *.s.*, luego *.s.* en relación al mayor es triple del número *.h.* Además, de *.a.* por *.k.* resulta *.g.*, luego de *.m.* por *.s.* resulta la raíz del cuadrado *.g.*; sea ella *.d.*, y de *.a.* por *.s.* resulta el número *.n.* Luego la [proporción] que hay entre *.a.* y *.m.* es la que hay de *.n.* a *.d.* Luego la proporción de *.n.* a *.d.* es el doble en relación al menor. Pero además la proporción que hay entre *.s.* y *.h.* es la que hay de *.n.* a *.f.* Luego la que hay de *.n.* a *.f.* es el triple en relación al mayor *.z.* con respecto a *.h.* es triple en relación al mayor *.z.* en relación a *.d.* doble en relación al menor. Luego *.d.* en relación a *.f.* es sesquiáltero en relación al mayor. De este modo se puede ver que el número resultante de *.a.* por *.d.* que produce *.p.* es doble en relación al menos a la raíz del cuadrado *.B.* que es *.x.* y que el mismo número *.p.* en relación al mayor es sesquiáltero en relación al número *.A.* Luego la proporción del número *.p.* a *.A.* es menor que la que hay del mismo *.p.* a *.x.*; luego el número *.A.* es mayor que el número *.x.* Luego, conforme a la primera parte de éstos, el número tiene mayor cuadrado que el cuadrado *.B.* Tienes entonces en la tercera multiplicación que en relación a lo más en la sexta multiplicación se dará lo prometido. Por donde puedes ver que aunque *.t.* sea contenido por un número no totalmente sexto sino quinto, lo tiene y algo más proviene a lo más en la quinta multiplicación, de tal modo que el número producto tenga un cuadrado mayor que el cuadrado que resulta de *.a.* por el máximo cuadrado del número resultante de la cuarta multiplicación. Si -lo que no creo- en la quinta multiplicación no ocurriera, no se puede hallar lo propuesto más allá de la sexta. Traspasa a números lo que se dice en letras y verás que lo que digo es verdad.

Comentario. La fuente es IX-11 Porisma: "Y queda claro que aquel lugar que tenga el número que mide a partir de la unidad, el mismo lugar tiene también el número según el cual mide a partir del número medido en la dirección del número anterior a él" (ya mencionado).

Cuando $\theta\,[x]$ el máximo contenido en x denota el entero y $a \geq \theta[a] + \sqrt{\theta[a]}$ y $a > 2$, así es $\theta\,[\alpha^2\ \alpha] > \alpha^2\ \Theta[\alpha]$.

Además cuando $a > \theta[a] + \sqrt{\theta[a]}$
siempre resulta un número entero n, de modo que
$\theta\,[a^{2n}\ a] > a^3\ \theta\,[a^{2n-2}]$

El número n es a lo sumo $= E\left[\dfrac{\sqrt{\theta[a]}}{a-\theta[a]}\right] + 1$.

Según el texto del teorema es necesario que n sea a lo sumo $= E\left[\dfrac{a-\theta[a]}{\sqrt{\theta[a]}}\right] + 1$.

Pero la condición $a < \theta\,[a] + \sqrt{\theta[a]}$ del primer miembro de la expresión es siempre cero.

37. Si dos cuadrados próximos y el número producto de la raíz por la raíz se juntan en un número total sobrará una unidad sobre el triple del número producto de la raíz multiplicada por la raíz.

Por ejemplo. Sean .*a*. y .*b*. dos raíces próximas, luego que .*b*. sea mayor, digo, que .*a*. y la unidad. Probaré que .*c*. resultante cuadrado del número .*a*. cuadrado de los números .*b*. y .*a*. valen dos veces .*a*. y dos veces .*c*. y la unidad. Sea entonces .*d*. cuadrado del número .*b*. Luego por la [proposición] .33ª., .*d*. consta de .*a*., .*b*. y .*c*.; luego consta de .*a*. dos veces, la unidad y .*c*.; luego añadido .*c*. que es el cuadrado del número .*a*., todo el número que consta de .*c*. y .*d*. consta de dos veces .*a*. y dos veces .*c*. y la unidad; pero del doble del número .*a*. por .*a*. resulta .*c*. y del doble del número .*a*. por la unidad, resulta dos veces .*a*. Luego, del doble del número .*a*. por .*b*. resulta dos veces .*a*. y dos veces .*c*. Luego dos veces .*a*. y dos veces .*c*. es el doble en relación a aquel [número] que resulta de .*a*. por .*b*., que sea .*h*. Luego lo que suma de dos veces *.a.* y dos veces *.c.* y el número *.h.* es el triple en relación a *.h.* Añade entonces la unidad porque .c. y *.d.* valen dos veces *.a.* y dos veces *.c.* y la unidad. Luego *.d.*, *.c.* y *.h.* exceden sobre el triple en relación a *.h.* en una unidad. Y ves lo propuesto.

Comentario. Fórmula: $a^2 + (a + 1)^2 + a (a + 1) = 3a (a + 1) + 1$.

38. Si de dos números uno se multiplica por el otro y algún tercero por el producto, resulta un número igual a aquel que produce el otro de los dos multiplicado por el todo multiplicador restando cuantos son las unidades en el tercero.

Por ejemplo. Sean tres números *.a.b.c.* de los cuales *.a.* se multiplica por *.b.* o a la inversa y resulta *.d.* Además multiplíquese *.c.* por *.d.* y resulta *.h.* Sea *.z.* el número múltiplo del número *.a.* y numere el número *.a.* al número *.z.* según el número *.c.* Digo también que *.h.* resulta de *.z.* multiplicado por *.b.* La [proporción] que hay de *.h.* a *.d.* es la proporción de *.c.* a la unidad. Luego la [proporción] que hay de *.h.* a *.d.* es la que hay de *.z.* a *.a.* y la que hay de *.d.* a *.b.* es la que hay de *.a.* a la unidad. Luego la [proporción] que hay de *.h.* a *.b.* es la que hay de *.z.* a la unidad. Luego hecho *.h.* primero, *.b.* segundo, *.z.* tercero y cuarto la unidad, es necesario que lo que resulta de *.h.* por la unidad sea igual a lo que resulta de *.b.* por *.z.*; pero de *.h.* por la unidad resulta *.h.* y de aquí se sigue lo propuesto.

Comentario. Fórmula: $(ab) . c = a . (bc) = b. (ac)$.

39. Es necesario que de una raíz multiplicada por otra resulte la raíz del cubo que se produce de los cubos de una de aquellas raíces multiplicada por la otra.

Es evidente que de un cuadrado multiplicado por un cuadrado resulta un cuadrado cuya raíz es producto de las raíces de los cuadrados multiplicandos. Pruebo del mismo modo para los cubos. Sean pues *.a.z.* y *.q.* tres cubos de los cuales *.q.* resulta del producto de *.a.* por *.z.* y sea *.c.* la raíz del cubo *.a.* y *.t.* la raíz del cubo .z.; de *.c.* por *.t.* resulta *.x.* Digo que *.x.* es la raíz del cubo *.q.*

Pues si no es su raíz *.h.* sea entonces el cuadrado *.b.* de la raíz *.c.* y del cubo *.a.* Entonces la proporción de *.q.* a *.z.* es como la de *.c.* a la unidad. Además de *.c.* por *.b.* resulta *.a.*; luego la proporción de *.a.* a *.b.* es como la de *.c.* a uno. De aquí se evidencia que la proporción de *.a.* a la unidad es como la proporción de *.c.* a la unidad triplicada. Luego la proporción de *.q.* a *.z.* es como la de *.c.* a la unidad triplicada. Pero la [proporción] hay de *.x.* a *.t.* es la de *.c.* a uno. Luego la proporción de *.a.* a *.z.* es la proporción de *.c.* a *.t.* triplicada. Pero la misma es la proporción de *.h.* a *.t.* triplicada. Luego por la .11. del octavo de Euclides, *.h.* es *.x.* Y así se hace claro lo que se proponía explicar.

Comentario. La fuente es Euclides VIII-11: "Si entre dos números caen números en proporción continua con ellos, entonces cuantos números como caigan entre ellos en proporción continua, tantos caerán también en proporción continua entre los que guardan la misma razón con los números iniciales" (ya mencionada).

Fórmula: $ab = \sqrt[3]{a^3b^3}$.

40. Si de tres cubos el primero no es octonario y multiplicado por el segundo produce el tercero, entonces, si el cuadrado del primer cubo no es menor que la raíz del tercero, también el primero multiplicado por el número resultante del cubo segundo y de algún número excedente sobre la raíz del tercero por el binario menor produce un número en el cuales mayor cubo de aquel que resulta del primero por el segundo. Glosa. Que de un cubo multiplicado por otro o por sí mismo resulta un cubo, es evidente por la tercera y cuarta [proposiciones] del noveno de Euclides. Que de un cubo multiplicado por un no cubo o a la inversa resulta un no cubo lo dice el corolario quinto del mismo.

Sea pues el cubo *.c.* cuyo cuadrado sea *.b.* y raíz *.a.* Multiplíquese por el cubo *.q.* que tiene la raíz *.x.* y resulte el cubo *.g.* tercero cuya raíz sea *.k.* Sea entonces *.k.*, producto de *.a.* por *.x.*; sea también que el número *.z.* exceda al número *.k.* al menos binario y el cuadrado *.b.* del primer cubo no sea menor que el número *.k.* Sea entonces el número *.fg.* de *.c.* por *.zq.* Digo que el número cúbico *.fg.* es mayor que el cubo *.g.* Pues pongo que *.h.* sea el triple del número *.k.*, la raíz aproximada siguiente después de *.k.*, sea *.m.* Luego, como el cubo *.c.* es mayor que el octonario, será *.a.* no menos que el ternario. Pero *.b.* no es menos que *.k.* luego *.c.* no es menos que *.h.* Pero si a lo que resulta de *.k.* multiplicado por *.m.* y el ternario por el producto se le añade la unidad, se hace una suma en la cual el cubo *.g.* es excedido por el cubo mayor próximo así como se ve por la [proposición] .33ª. de éstos. Luego así como es claro por la .34. de éstos, si a aquel [número] que resulta de *.h.* por *.m.* se le añade la unidad resulta una suma en la cual el mismo cubo *.g.* es superado por su cubo próximo superior. Pero *.z.* excede al menor en una unidad *.m.* y *.c.* no es menos que *.h.* Luego de *.c.* por *.z.* resulta más que aquella suma. Luego *.f.* es más que aquella suma; luego en el número *.fg.* es mayor que el cubo *.g.* Esto es lo que se quería mostrar.

Comentario. Las fuentes son Euclides IX-3: "Si un número cubo, al multiplicarse por sí mismo, hace algún número, el producto será cubo" y su fórmula es: $(a^3)^2$ es un cubo, es decir $[(a^3)^2 = (a^2)^3]$ o sea: $1:a = a: a^2 = a^2: a^3$; IX-4: "Si un número cubo, al multiplicar a un número cubo, hace algún número, el producto será cubo" y se expresa: $a^3.b^3$ es un cubo, es decir $[a^3b^3 = (ab)^3]$, $a^3:b^3 = (a^3)^2:a^3b^3$.

Cuando *R [x]* el máximo contenido en *x* denota el número cuadrado entero y cuando
$\alpha^2 > da, k > 2, \alpha > 2$
entonces es $R [a^3 (a^3 + aa + k)] > d^3a^3$.

41. Si el caso se da de algún modo distinto, no es menos necesario que un cubo multiplicado por un cubo y algo y después por el producto y de nuevo por aquel producto y así tantas veces cuanto es necesario, digo que el número producto de la última multiplicación al menos es un cubo mayor que aquel que resulta del primer cubo multiplicado por el cubo máximo de aquel número que resulta de la penúltima multiplicación.

Sea primeramente que permanezcan todas las anteriores [condiciones] excepto una sola: que se ha dicho *.c.* no es octonario.

Sea *.c.* octonario. Luego puede acontecer que en *.fg.* no hay un cubo mayor que el cubo *.g.*, como si *.b.* es igual a *.k.* y el número *.z.* excede tanto a la unidad como el número *.m.* porque de *.a.* binario por *.b.* da *.c.*, sería *.c.* doble de *.b.* pero *.h.* es triple de *.k.*; luego *.c.* es menos que el número *.h.* en una tercera parte suya. Pero a la sola unidad *.z.* la supera el número *.m.* Luego de *.c.* por *.z.* resulta menos que [el producto] de *.h.* por *.m.* de lo cual se sigue en *.fg.* que el número *.g.* es el cubo máximo. Pero entonces si de *.c.* por *.f.* resulta *.p.* y de *.c.* por .g. resulta *.s.*, es necesario que el número *.ps.* sea un número cúbico mayor que .s.

Sea entonces *.t.* la raíz del cubo *.s.* triple del número *.t.*; sea *.l.* la raíz próxima mayor sea *.d.* Luego *.t.* resulta de *.a.* por *.k.*; luego *.t.* es el doble de *.k.*; luego también de *.b.*; luego el número *.t.* es igual al número *.c.*; luego el número *.l.* que es el triple de *.t.* es también triple de *.c.*; pero de *.c.* por *.z.* resulta *.f.*; luego *.f.* es óctuplo de *.k.* Luego es más que el cuádruplo de *.t.* Luego es más que el cuádruplo de *.c.* Pero *.c.* por *.f.* da *.p.* Luego *.p.* es óctuplo de *.f.* y *.f.* es más que cuádruplo de *.c.* Luego *.p.* contiene a *.c.* más de treinta y dos veces. Pero el número *.c.* es excedido por el número *.d.* en una sola unidad. Luego *.p.* contiene *.d.* más de veintiocho [veces]. Además *.lk.* es triple de *.t.*, pero *.t.* es óctuplo de la unidad, luego ***.l.*** contiene veinticuatro veces la unidad. Pero del producto de *.l.* por *.d.* resulta *.y.* luego *.y.* contiene veinticuatro veces al número *.d.* Luego el número *.p.* es mayor que el número *.y.* y añade sobre él más de una unidad. Luego en el número *.ps.* hay un cubo mayor que el número *.s.* y esto es lo que quise mostrar.

Sea *.k.* raíz cuádrupla del número *.b.* y sea convencionalmente sedécupla del número *.z.* y del producto de *.c.* por *.f.* resulte el número *.d.*, de *.c.* por *.g.* el número *.s.* cuya raíz es *.t.* Además de *.c.* por *.d.* resulta *.q.*, de *.c.* por *.s.* resulta *.p.* cuya raíz es *.b.* Luego es doble de *.b.* en relación a menos *.c.* Sea que el doble este es octonario. Luego *.c.* es binario; pero de *.a.* por *.k.* resulta *.t.*, porque *.c.* por *.g.* da *.s.* Luego *.t.* es doble de .k. Luego es cuádruplo de *.f.* porque *.k.* es sedécuplo de *.z.* y *.f.*, de *.c.* por *.z.* resulta el óctuplo de *.z.* Luego *.k.* es doble de *.f.* Luego *.t.*, que es doble de *.k.* es cuádruplo de *.f.*; pero de *.c.* por *.f.* resulta *.d.* Luego *.d.* es óctuplo de *.f.*; luego es doble de *.t.* Pero *.b.* es doble de *.t.* porque *.b.* resulta de *.c.* por *.t.* porque de *.c.* por *.s.* resulta *.p.* Luego *.d.* y *.b.* son iguales. Resulte para esto de *.c.* por *.q.* el número *.r.* y de *.c.* por *.p.* resulte *.l.* cuya raíz *.m* . es entonces *.q.* a *.d.* óctuplo, luego también a *.k.*; pero *.m.* es doble de *.b.* luego *.q.* es cuádruplo de *.m.*, luego *.r.* -que es óctuplo de *.q.*- contiene a *.m.* treinta y dos veces. Multiplíquese de nuevo *.c.* por *.r.* y resulta *.h.* y por *.m.* y resulta *.x.* cuya raíz sea *.n.* Luego *.n.* es doble de *.l.*, luego *.r.* contiene a *.n.* dieciséis veces. Pero *.h.* es óctuplo de .r., luego *.h.* contiene a *.n.* ciento veintiocho veces, porque de ocho por 16 resulta 128. Reserva entonces esto. Además *.k.* es doble de *.c.* porque es cuádruplo de *.b.* Luego *.t.* contiene cuatro veces a *.c.*, luego *.b.* ocho veces, luego *.m.* dieciséis, luego *.n.* contiene a *.c.* treinta y dos veces. Procedo de nuevo, de *.x.* por *.h.* hago *.y.*, de *.c.* por *.x.* resulta *.b.* Luego *.y.* contiene a *.h.* ocho veces, pero de .8. por .128. resulta .1024. Luego *.y.* contiene a *.n.* mil veinticuatro veces. Sea el número *.I.* la raíz del cubo *.b.* Luego este número es doble de *.n.* Luego está contenido en el número *.y.* quinientas doce veces. Luego el número *.d.* contiene al número *.y.* ocho veces, pero ocho por 512 da 4096. Luego en *.d.* está el número *.I.* 4096 [veces]. Luego el número *.b.* contiene al número *.l* según su mitad, esto es, según el número 2048; luego el número *.l.* contiene al cubo *.c.* dos veces sesenta y cuatro veces, es decir, ciento veintiocho. Además, de *.c.* por *.y.* resulta *.m.*, de *.c.* por *.m.* resulta *.M.* cuya raíz es *.D.*; luego el número *.n.* contiene al número *.D.* mil veinticuatro veces, porque *.n.* es doble de *.l.* En cambio el cubo *.t.* se contiene en el número *.n.* doscientas cincuenta y seis veces. Sea *.a.* el triple de *.D.*, luego el número *.d.* contiene a *.a.* más de trescientas cuarenta veces. Además sea *.N.* la raíz próxima después de *.n.* que la excede en una unidad. Observa sin embargo que el número *.N.* contiene al número *.c.* doscientas cincuenta y siete veces. Luego más veces el número *.M.* contiene al número *.N.* que el número *.N.* al número *.c.* Sea entonces *.d.* primero, *.A.* segundo, *.n.* tercero, *.c.* cuarto, porque entonces la proporción del primero al segundo es mayor que la del tercero al cuarto, por lo cual es necesario que *.d.* por *.c.* sea más que *.H.* por *.n.* De esto se infiere que el número *.LM.* es mayor que el cubo *.M.* y así tienes lo que buscabas. Ves entonces que puesto el octonario que es el mínimo de los cubos, proviene inmediatamente lo propuesto. Mucho más pronto resulta puesto un cubo mayor. Este modo de proceder es necesario, aunque no de modo permanente, alguna vez sin embargo ocurre lo que se busca.

Comentario. Cuando *R[x]* tiene el mismo significado anterior, *n* siempre es un número entero, entonces se procura que
$R\,[\alpha^{3n}\,(a^3 + k)] > a^3\,R\,a\,[(a^{3(n-1)} + k)]$.

42. En las fracciones que no tienen raíz no se puede hallar una raíz aproximada tan próxima que no pueda haber otra más próxima, sea cuadrada o cúbica la raíz de la fracción que se busca.

Esto es por lo que las premisas son treinta [?] y ella[s] hasta las siguientes. Luego primero trato sobre las fracciones filosóficas y primeramente de la raíz cuadrada. Sea dada la fracción $\frac{ag}{.b.}$ que no puede cuadrarse, pero sea *.b.* su denominador cuadrado. Pues esto puede darse en toda fracción. Y el número *.ag.* que es el numerador, no sea cuadrado. Sea también la denominación filosófica *.z.*, el cual número multiplicado por sí y por el producto y de nuevo por ese y así siguiendo tantas veces cuanta es la operación, y sea el producto *.b.* un número en alguno de los lugares impares, como es necesario que suceda. Suceda en el quinto donde está el lugar de los cuartos. Son entonces $\frac{ag}{.b.}$ de un entero $\frac{ag}{.z.}$ de un tercio de esta fracción, es decir *.b.* la raíz buscada. Y hallada la raíz de este numerador *.ag.* se puede hacer más exactamente. Sea ésta el número *.s.* que multiplicado por sí consume *.g.* de *.ag.* Además la raíz *.b.* del número cuadrado sea el número *.t.* Luego $\frac{s}{.t.}$ es la raíz exacta de la fracción $\frac{b}{.g.}$ exactamente cuadrada. Digo que la fracción $\frac{ag}{.b.}$ puede hallarse más cerca de la raíz, esto es, más cerca de su consumidor si se multiplica por sí misma.

Por ejemplo, transfiérase la fracción $\frac{ag}{.b.}$. a otro lugar, por ejemplo al séptimo, donde está el lugar de los sextos pero acaso no se hace así. Multiplicando por la denominación filosófica por *.z.* el número *.ag*. y entonces *.z*. se multiplica por el producto. Pero entonces resulta *.fc*. y serán $\frac{ag}{.b.}$ de un entero los sextos *.fc*. Pero si quiero hallar la denominación de los sextos que tienen respecto de los enteros acaso multiplico *.z*. por *.b*. y después por el producto. Entonces resulta *.d.* Esto es claro atendiendo a la naturaleza de las fracciones filosóficas y a la octava y la 13ª [proposición] de éstos. Pues la fracción $\frac{ag}{.b.}$ es igual sin duda a la misma fracción $\frac{fc}{.d.}$. Pero observa que multipliqué *.z*. por *.ag*. y por el producto y resultó *.fc*. Luego, por la .37. anterior, del producto de *.l*.- que es cuadrado del número *.z*.- por *.ag*. resulta *.fc*. Del mismo modo de *.l*. por *.b*. resulta *.d*., de donde es claro que $\frac{ag}{.b.}$ es igual a la fracción $\frac{fc}{.d.}$. Pongo que de *.l*. por *.a*. resulta *.f.* y de *.l*. por el cuadrado *.g*. resulta el cuadrado *.c*. Luego si en el número *.fc*. hay un mayor cuadrado que el cuadrado *.c*. puede saberse viendo los números. Digo que puede saberse conforme a la .32ª. de éstos. Que si no es, digo que de la fracción $\frac{fc}{.d.}$ no se extrae una raíz mayor que es la raíz de $\frac{s}{.t.}$. Sea pues la raíz del número *.d*. el número *.q*., sea el número *.p*. la raíz del número *.c*. Consta que no se extrae de la fracción $\frac{fc}{.d.}$ que tiene estos números la raíz mayor que $\frac{p}{.q.}$. Tendré entonces lo propuesto habiendo probado que la fracción $\frac{p}{.q.}$ es la fracción $\frac{s}{.t.}$.

Y esto así. De *.l.* por *.g.* resulta *.c.* y de *.l.* por *.b.* resulta *.d.* Luego la fracción *.gb.* es *.cd.* Luego como la fracción cuadrada es la misma al cuadrado es necesario que la raíz de la raíz sea la misma. Si en el número *.fc.* hay un cuadrado mayor que el número *.c.* entonces también se extrae de *.fc.* la mayor raíz *.p.* y -como es claro- se extrae de la fracción $\frac{fc}{.d.}$ una raíz mayor que la fracción $\frac{p}{.q.}$. Luego también mayor que la fracción $\frac{s}{.t.}$. Si en el número *.fc.* no se da un cuadrado mayor que el cuadrado *.c.* transfiérase la fracción $\frac{fc}{.d.}$ de nuevo por multiplicación del número *.l.* por el numerador y el denominador así como se hizo la traslación del quinto lugar al séptimo y luego si procede del noveno al undécimo. Y así hasta que aparezca un numerador que tenga un cuadrado mayor que aquel que resulta de *.l.* multiplicado por el máximo cuadrado del numerador precedente. Que esto sucede es evidente por la segunda parte de la [proposición] .32ª.

Por esto se ve -observando diligentemente- que cuanto más lejano y más remoto de los enteros se deduce una fracción, tanto más cercana se halla la raíz en la extracción de la raíz cuadrada de la fracción. Que suceda lo mismo en las raíces cúbicas a extraer considéralo del modo siguiente. Sea dada una fracción filosófica en el séptimo lugar que es segundo cuarto y es de los sextos, y sea su numerador *.ab.* teniendo a *.b.* máximo cubo, siendo que él mismo no es cúbico. Resulta de la [proposición] .34. que la denominación cúbica de los sextos respecto al entero es aquel .c. cuya raíz sea *.s.*; extráigase la raíz cúbica del número *.ab.* y sea *.q.* Entonces *.q.* sería la raíz exacta del cubo *.b.* Ha sido entonces extraída la raíz *.qs.* de la fracción $\frac{ab}{.c.}$ cuanto más aproximadamente se pueda hacer en estos números. Digo que puede haberlo más aproximado a la raíz mayor. Pues cuanto la raíz mayor no sea exacta, será tanto más aproximada. Llévese entonces la fracción $\frac{ab}{.c.}$ al tercero de los cuartos lugares, esto es a la décima donde está el lugar de los novenos. Hago así. Multiplico por la denominación filosófica que es el número *.p.* a *.ab.* y de nuevo *.p.* por el producto y de nuevo por aquel producto y resulta *.fg.* Si se multiplica *.p.* por el cubo *.c.* y por el producto y de nuevo por el producto, resulta *.h.* Digo que los novenos *.fg.* son la fracción $\frac{fg}{.h.}$ de un entero. Esto resulta así. El número *.s.* es raíz del número cúbico *.c.*; sería entonces -como se intuye claramente- *.s.* la denominación de los segundos respecto al entero como que *.c.* es la denominación de los sextos respecto al entero. Es entonces *.s.* el cuadrado del número *.p.* porque *.p.* es la denominación de los minutos respecto al entero, lo que se puede ver por la [proposición] .13. de éstos. Pero de *.p.* por *.s.* resulta el número *.m.* Luego *.m.* es el cubo del número *.p.* Muestro que de *.m.* por *.c.* resulta *.h.* Pues de *.p.* por *.h.* resulta el número *.n.*, en esto *.p.* hace *.k.*, luego de *.p.* por *.k.* resulta *.h.* Además multiplíquese *.p.* por *.c.* y resulta *.n.*, multiplíquese *.p.* por *.n.* y resulta *.k.* Luego del producto de *.s.* por *.c.* resulta *.k.* por la [proposición] .37. Se multiplica *.s.* por *.c.* y resulta *.k.* y *.p.* por *.k.* y resulta *.h.* Pero cuantas son las veces que *.p.* contiene a la unidad, tantas veces *.m.* contiene *.s.* Luego por la [proposición] .34. de *.m.* por *.c.* resulta *.h.* por la misma razón de *.m.* por *.ab.* resulta *.fg.*; luego $\frac{ab}{.c.}$ es la fracción $\frac{fg}{.h.}$ Además de *.p.* por *.s.* resulta *.m.*; luego *.m.* es la denominación de los tercios. Pero de los tercios por los sextos resultan los novenos. Luego como de *.m.* por *.c.* resulta *.h.*, es necesario que la denominación de los novenos en relación al entero sea el número *.h.* Luego $\frac{fg}{.h.}$ son los novenos *.fg.* Luego traje correctamente los sextos a los novenos multiplicando los números por el cubo *.m.* de la denominación filosófica.

Pongo que de *.m.* por *.b.* resulta *.g.*, luego si en *.fg.* *.g.* es el máximo cubo, la raíz extraída en estos números de la fracción $\frac{fg}{.h.}$ sería raíz exacta de la fracción $\frac{g}{.h.}$. Pero esta fracción es la fracción

$\frac{b}{.c.}$, luego la raíz de una es la raíz de la otra. Si en el número *.fg.* se da un cubo mayor que el número sea él *.y.*, luego la fracción *.h.* es mayor que la fracción *.c.* Luego también tiene mayor raíz. Pero su raíz se extrae de la fracción $\frac{fg}{.h.}$ si *.y.* es el máximo cubo en el número *.fg.* Tienes entonces por esta vía lo que buscabas.

Si en el número *.fg.* el máximo cubo es *.g.* multiplicada por el número *.m.* la fracción $\frac{fg}{.h.}$. y la reducirás al décimo tercer lugar que es el de los duodécimos y es el cuarto de los cuartos lugares. Y si allí hallas en el número numerador un cubo mayor que aquel que resulta de *.m.* por *.g.* hallas ahí la raíz mayor. Averigua si esto es así o no, si a los números allí hallados los multiplicas de nuevo por *.m.* traerás la fracción al lugar décimo sexto, pero que en alguna tal traslación hallas en el numerador el cubo mayor que aquel que resulta de *.m.* por el máximo cubo del primer numerador, es evidente por la prueba de la segunda parte próxima. Hallado esto hallas una raíz mayor que en el lugar precedente.

Luego, buscas la raíz cuadrada o cúbica donde no puedes hallar la exacta cuanto la fracción ni cuadrada ni cúbica diste más de los enteros, por modo que dije hallarás la raíz tanto más aproximada y con menos resto de la operación. Pero no es necesario proceder la infinito, sino que desde allí llegarás a un pequeño resto, de modo que su omisión no produzca un error sensible al proceder sobre el resto. Pero si buscas la raíz de una fracción vulgar ni cuadrada ni cúbica, buscas por cualquier cuadrado si la raíz es cuadrada y por cualquier cubo si buscas la raíz cúbica, multiplica los números de la fracción reducida a la denominación cuadrada o cúbica. Y cuantas más veces multipliques, tanto más hallarás una raíz cada vez más aproximada, así como se deduce de las premisas.

Éstas son las cosas que debes saber sobre las fracciones; y considero que así es y termino.

Comentario. Cuando la raíz del número *a* sólo se puede extraer aproximadamente, y cuando se calcula un valor aproximado, siempre se puede descubrir un valor todavía más preciso.

INDICE